

S
M
C
C
A



BOLETÍN

Sociedad Mexicana de Computación
Científica y sus Aplicaciones

Año IV - Número 4

Diciembre 2018



BOLETÍN

Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones

Consejo Editorial

Pablo Barrera Sánchez, UNAM

Pedro Flores Pérez, UNISON

Irma Delia García Calvillo, UAdeC (*editor responsable*)

José Gerardo Tinoco Ruíz, UMSNH

Editores técnicos

Vanesa Ávalos Gaytan, UAdeC

Oliver Ávalos Rosales, UAdeC

Yajaira Cardona Valdés, UAdeC

El Boletín de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A. C. (SMMCA), Año IV, No. 4, Diciembre 2018, es una publicación anual editada por la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A. C., calle Luis Horacio Salinas, 545, Col. Valle de Morelos, Saltillo, Coahuila, C.P. 25013, Tel. (844) 4 10 12 42, www.smmca.org.mx. Editor responsable: Irma Delia García Calvillo. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 - 2017 - 103114330600 - 203, ISSN: 2594 - 0457, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Yajaira Cardona Valdés, calle Magisterio, s/n, Unidad Camporredondo, Edificio S, Saltillo, Coahuila, C.P. 25280, fecha de última modificación, 15 de diciembre de 2018.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A. C.

Suscripciones al Boletín vía correo electrónico: smcca@smcca.org.mx

Contenido

CARTA DE BIENVENIDA	4
---------------------	---

Reseña del XXVII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico....5	
--	--

Ganadores del decimoséptimo Premio MIXBAAL	10
--	----

Convocatoria para el decimoctavo Premio MIXBAAL	11
---	----

ARTÍCULOS

Explicit Solution of a Linearly Constrained Infinite Quadratic Problem.....	13
---	----

Resolución de la Ecuación Unidimensional Homogénea de Aguas Someras por el Esquema de Lax-Wendroff.....	23
---	----

Develación del dominio de un fluido de Stokes estacionario.....	28
---	----

Solución numérica de la ecuación vectorial de Saint-Venant utilizando métodos híbridos.....	45
---	----

PRÓXIMOS EVENTOS

VII Encuentro Cuba-México Métodos Numéricos y Optimización.....	51
---	----

XXVIII ENOAN.....	52
-------------------	----

¿QUIERES PUBLICAR ARTÍCULOS, INFORMACIÓN SOBRE EVENTOS O NOTICIAS EN EL BOLETÍN?.....	53
---	----

Carta de Bienvenida

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones, A.C. (SMCCA) y el comité Editorial, les dan una cordial bienvenida a la cuarta edición del Boletín electrónico anual de la SMCCA, el cual tiene como objetivo mantenerlos informados de las actividades realizadas por la SMCCA y sus asociados. En el Boletín se publicarán noticias, eventos, artículos de divulgación y de investigación de alto nivel en el área de Cómputo Científico y sus Aplicaciones, así como resúmenes de las mejores tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

En esta cuarta edición del boletín se presenta: una breve semblanza de la XXVII Escuela Nacional Optimización y Análisis Numérico, llevada a cabo este año del 27 al 31 de agosto en las instalaciones de la Universidad Autónoma de Aguascalientes en la Ciudad de Aguascalientes, México; en esta edición se presentan a los ganadores de la decimoséptima edición del premio Mixbaal para la mejor tesis de Licenciatura y se presenta la convocatoria para participar en dicho premio en su decimoctava edición. Además se presentan cuatro artículos de investigación, tres de ellos son trabajos por solicitud y uno de ellos correspondiente a la ganadora del premio Mixbaal. Por último presentamos convocatorias de futuros eventos a realizarse.

La SMCCA agradecerá que ante el interés que surja en los lectores en los temas que se presenten en nuestra publicación, éstos se conviertan en usuarios asiduos, así como en miembros activos de nuestra Sociedad. La información del registro de membresías a la SMCCA la pueden consultar en el Módulo de Registro de nuestra página www.smcca.org.mx.

Rina Betzabeth Ojeda Castañeda

Presidenta

Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones



Por Rina Betzabeth Ojeda Castañeda
y Jorge Eduardo Macías Díaz

DEL 27 AL 31 DE AGOSTO DE 2018 SE REALIZÓ CON GRAN ÉXITO LA XXVII ESCUELA NACIONAL DE OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO (ENOAN) Y EL VIII TALLER DE MODELACIÓN MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL: “ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS EN LA BIOLOGÍA Y EN LA FÍSICA”, EN LAS INSTALACIONES DEL EDIFICIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES, EN LA CIUDAD DE AGUASCALIENTES, AGS. LA ORGANIZACIÓN DE ESTA XXVII EDICIÓN DE LA ENOAN ESTUVO A CARGO DE UN COMITÉ LOCAL FORMADO POR PROFESORES-INVESTIGADORES Y ALUMNOS DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES, Y DEL COMITÉ NACIONAL CONFORMADO POR PROFESORES-INVESTIGADORES MIEMBROS EN ACTIVO DE LA SOCIEDAD MEXICANA DE COMPUTACIÓN CIENTÍFICA Y SUS APLICACIONES.

Durante esa semana, 120 asistentes en total, entre alumnos de licenciatura y posgrado, profesores, investigadores y profesionales interesados en la aplicación de las Matemáticas y el Cómputo Científico, se reunieron para participar en diversas actividades académicas: 10 cursos cortos, 6 conferencias plenarias, 2 conferencias invitadas (una de la ENOAN y la otra del Taller de Modelación Matemática y Computacional), 20 conferencias invitadas de la Reunión Conjunta de la Red de Matemáticas y Desarrollo de CONACYT, 12 conferencias invitadas del II Mini Simposio de Medicina y Matemáticas, 27 ponencias presenciales y 20 carteles por solicitud de la ENOAN, 10 ponencias por solicitud presenciales del Taller de Modelación y 5 ponencias en formato de cartel de la Red de Matemáticas y Desarrollo.

Los conferencistas (plenarios e invitados tanto de la ENOAN como de la Red de Matemáticas y Desarrollo, del II Mini Simposio de Medicina y Matemáticas y del Taller de Modelación) y los instructores de los cursos que participaron en el evento, son profesores-investigadores de diferentes Instituciones de Educación Superior y Centros de Investigación tanto extranjeros como nacionales. Son profesionales ampliamente reconocidos en sus áreas de conocimiento, con gran experiencia en el ámbito de la docencia e investigación en temas de actualidad, relevantes y en el estado del arte sobre la aplicación de las matemáticas y del cómputo científico en la Ciencia e Ingenierías. Actualmente participan en proyectos establecidos para la solución de problemas ya sea de interés nacional y/o internacional. Este perfil idóneo de los profesores-investigadores permitió a la ENOAN ofrecer a alumnos de licenciatura y posgrado de distintas instituciones educativas del país y del extranjero cursos especializados a diferentes

niveles: básico, intermedio y avanzado, a los que generalmente ellos no pueden acceder con regularidad en sus instituciones. Los **cursos básicos** impartidos fueron: “Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales tridimensionales”, “Introducción al diseño de sitios WEB”, “Julia + Linux + USB”, “Introducción al Cómputo Científico”; los **cursos intermedios** fueron: “Factorizaciones Matriciales, Reconocimiento de Facciones y Otras Aplicaciones”, “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Algebraicas”, “Modelado y Resolución de Problemas de Optimización con Python & Gurobi”; y los **cursos avanzados**: “Sistemas Dinámicos Aplicados a EDP”, “Introducción al Método de Galerkin Discontinuo” y “Modelación para Algoritmos Genéticos”, sus contenidos, bibliografía e información de los instructores, se pueden consultar en la página de la ENOAN en la liga

www.smcca.org.mx/enoan2018



La participación de conferencistas plenarios e invitados internacionales y nacionales del evento, permitió a todos los asistentes tener la oportunidad de conocer el estado del arte de la Computación Científica y sus aplicaciones tanto en México, como en otros Países. Aquí se hace mención de los nombres de algunos de ellos, pero el lector puede consultar el programa completo de conferencias impartidas en

www.smcca.org.mx/en0an2018

Conferencistas Plenarios

- DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO de la Facultad de Ciencias de la UNAM
- DR. QIN SHENG, Department of Mathematics, Center for Astrophysics, Space Physics and Engineering Research (CASPER), Baylor University, Texas, USA
- DR. HÉCTOR JUÁREZ, Universidad Autónoma de México, Iztapalapa
- DR. VADIM AZHMYAKOV, Universidad de Medellín, Colombia
- DR. JORGE EDUARDO MACÍAS de la Universidad Autónoma de Aguascalientes
- M.C. Angélica Valdivia, INEGI-Aguascalientes

Coferencistas Invitados

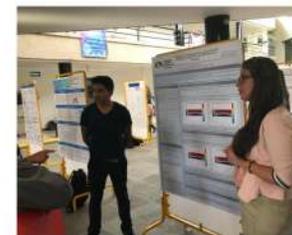
- DR. PEDRO FLORES PÉREZ de la UNISON
- DR. FRANCISCO JAVIER SOLÍS LOZANO, CIMAT-Guanajuato
- DR. SALVADOR BOTELLO RIONDA, CIMAT-Guanajuato
- DR. PEDRO GONZÁLEZ CASANOVA, Instituto de Matemáticas UNAM-CU
- DR. JOSÉ LUIS MORALES, Departamento de Química, CINVESTAV-IPN
- DR. MIGUEL ÁNGEL UH ZAPATA, CIMAT-Mérida
- DR. GILBERTO CALVILLO VIVES, Instituto de Matemáticas UNAM-Cuernavaca
- DR. GERARDO DUEÑAS, Instituto de Matemáticas, UNAM-Juriquilla
- DR. BENITO CHEN CARPENTIER, University of Texas at Arlington, USA,
- DR. CLEMENTE SERGIO NOVALES ROSALES, Servicio Oncología Quirúrgica, Hospital Alta Especialidad, ISSTE
- DR. JUAN ALBERTO NADER KAWACHI, Clínica de Enfermedades Cerebrovasculares, Médica Sur
- DR. JESÚS LÓPEZ ESTRADA, Facultad de Ciencias de la UNAM, entre otros.

Dentro de este marco de vinculación de academia-investigación-industria, los alumnos asistentes también tuvieron la oportunidad, un buen número de ellos, 62 ponencias por solicitud, de exponer de manera presencial o a través de un formato de cartel, del desarrollo y los resultados de investigaciones que llevan a cabo en conjunto con sus profesores, como trabajos de tesis (licenciatura, maestría, doctorado) o en proyectos de investigación establecidos en sus Instituciones, recibiendo una retroalimentación de utilidad para mejorar su trabajo, tanto de parte de investigadores especializados en los temas presentados, como de sus compañeros de otras instituciones, interesados en estos temas.

Por último es de gran importancia señalar que el gran esfuerzo de trabajo realizado tanto por el Comité Local (Sede UAA) como el Comité Nacional (aglutinados dentro de la SMCCA) en la organización, y contando con el importante apoyo financiero de Instituciones, Dependencias y Centros de Investigación como: CONACYT, la Sociedad Matemática Mexicana, la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones, la UAA y la Red de Matemáticas y Desarrollo de CONACYT, permitió obtener un conjunto de resultados a beneficio de una comunidad científica conformada por alumnos, profesores, investigadores y profesionales interesados en la Computación Científica y las Matemáticas Aplicadas, que incidieron en indicadores de impacto como los que se presentan en la siguiente tabla:

Indicador		Cantidad
Total de asistentes		120
Alumnos beneficiados del evento		85
Becas estudiantes de Instituciones de Provincia:		40
Becas profesores y alumnos de la UAA		15
Becas inscripción profesores, investigadores, ponentes invitados e instructores de cursos		20
Becas inscripción miembros del comité organizador nacional		10
Programas Educativos de Instituciones participantes		30
Investigadores, Docentes y Profesionales beneficiados del evento		35
Cuerpos Académicos y Grupos de Investigación del País y del Extranjero		12
Número de Instituciones participantes		
Nacionales	40	43
Extranjeras	3	

Memorias de la XXVII ENOAN



Ganadores del Premio MIXBAAL

Ganadores de la *decim séptima edición* del premio Mixbaal a la Mejor Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Ganadora del premio Mixbaal

Martha Leticia Ruiz Zavala

Lic. en Matemáticas Aplicadas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Trabajo: Solución Numérica de la Ecuación Vectorial de Saint-Venant utilizando métodos híbridos

Director: Dr. Francisco Javier Domínguez Mota

Mención Honorífica

Sergio Daniel Raya Rios

Lic. en Actuaría

Universidad Nacional de Autónoma México

Trabajo: Temas selectos de minería de textos

Director: Dra. Amparo López Gaona

Co-Director: Dra. Lizbeth Naranjo Albarrán

Mención Honorífica

Olmo Guerrero Medina

Lic. en Ciencias de la Tierra

Universidad Nacional de Autónoma México

Trabajo: Exploración numérica sobre el impacto del exceso de núcleos de condensación en la cantidad de lluvia

Director: Dr. Gerardo Hernández Dueñas

CONVOCATORIA AL PREMIO



A LA MEJOR TESIS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A.C. (SMCCA) convoca a los profesionistas en matemáticas y ramas afines, recién titulados, a presentar su tesis o su trabajo terminal de licenciatura para el **DÉCIMO OCTAVO PREMIO MIXBAAL A LA MEJOR TESIS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS** de acuerdo a las siguientes:

BASES

1. El trabajo, **sobre un tema de matemáticas aplicadas**, deberá haber sido presentado en alguna institución mexicana de educación superior para obtener el grado de Licenciatura.
2. La fecha de obtención del grado deberá estar comprendida en el lapso del 1 de febrero de 2018 al 31 de enero de 2019.
3. Se deberá enviar en forma impresa y por cuadruplicado:
 - a) Copia del trabajo mecanografiado o tipografiado.
 - b) Documento probatorio con fecha de obtención del título.
 - c) Documento en el que conste oficialmente que el trabajo enviado a concurso fue presentado como requerimiento para la obtención del título.
 - d) Breve currículum del candidato.
 - e) Nombre del asesor o director del trabajo.
 - f) Nombres de los sinodales del examen profesional.

La fecha límite para recibir toda la documentación es el 30 de abril de 2019.

4. El jurado será designado por la Comisión del PREMIO MIXBAAL y estará integrado por especialistas de reconocido prestigio en diversas ramas de las ciencias relacionadas con las matemáticas aplicadas.

5. El PREMIO MIXBAAL incluye un reconocimiento y un diploma.

6. Se otorgarán menciones honoríficas a juicio del jurado.

7. Los trabajos de tesina serán evaluados previamente para su aceptación a concurso.

8. La decisión del jurado será inapelable.

Los resultados serán comunicados verbalmente a los interesados el 30 de julio de 2019 y publicados posteriormente en la página de la sociedad: <http://www.smcca.org.mx/>

La entrega del PREMIO MIXBAAL será durante la ceremonia de inauguración de la XXVIII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico.

Cualquier situación no prevista en esta convocatoria, será resuelta por la Comisión del PREMIO MIXBAAL.

Los documentos probatorios deberá enviarse a:

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas, Cubículo 226
Dr. Pablo Barrera Sánchez
Circuito Exterior s/n
Colonia Copilco Universidad
04510 México, D.F.

Informes:

Tels: 5556224836

Correos: pablobarrera@ciencias.unam.mx

Explicit Solution of a Linearly Constrained Infinite Quadratic Problem

Gilberto Calvillo-Vives^{1*}, Jesús López-Estrada²
David Romero¹

¹ Instituto de Matemáticas, UNAM
62210 Cuernavaca, Mor., Mexico.

² Facultad de Ciencias, UNAM
04510 Ciudad Universitaria, Mexico City, Mexico.

* e-mail: gilberto.calvillo@im.unam.mx

Abstract

A norm minimization problem posed in K -dimensional finite arrays without non-negativity constraints was efficiently solved by Romero Romero [11]. Going beyond we provide here an explicit, exact solution in case the arrays are replaced by L_2 -Hilbert spaces. Furthermore, we propose a polynomial procedure yielding an approximate optimal solution when non-negativity constraints must be taken into account for $K = 2$.

Key words: Input-output integral equations; Quadratic optimization; Continuous transportation constraints; Norm minimization; Radon transform.

Introduction

Closely related to optimization problems that arise when updating input-output matrices in economic studies [6], inferring migration patterns in demography [10], and reconstructing images in tomography Kak and Slaney [5], or among other applications in the realm of statistical sampling [3], Romero [11] considered

Problem 1.1. *Given real vectors*

$$\underline{u} = (u_1, \dots, u_m) \text{ and } \underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

satisfying $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v_j$, *and an m -by- n real matrix* $A = (A_{ij})$, *find* $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *that minimizes*

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - A_{ij})^2 \text{ subject to linear constraints}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = u_i, \text{ for } i = 1, \dots, m, \text{ and } \sum_{i=1}^m X_{ij} = v_j,$$

for $j = 1, \dots, n$.

and proved that its optimum $X^* = (X_{ij}^*)$ can be found by means of the explicit, compact formula:

$$X_{ij}^* = A_{ij} + \frac{u_i - u^i}{n} + \frac{v_j - v^j}{m} - \frac{\varphi}{mn},$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

where $u^i = \sum_{\ell=1}^n A_{i\ell}$, $v^j = \sum_{k=1}^m A_{kj}$, and $\varphi = \sum_{i=1}^m (u_i - u^i)$, for $i = 1, \dots, m$ and $j = 1, \dots, n$, thus yielding a

solution algorithm of linear computational complexity in the number mn of variables.

Calvillo and Romero [2] furnished a polynomial algorithm to solve Problem 1.1 when non-negativity constraints are added, namely,

Problem 1.2. Given real vectors (u_1, \dots, u_m) and (v_1, \dots, v_n) satisfying $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v_j$, and an m -by- n real matrix $A = (A_{ij})$, find $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ minimizing $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - A_{ij})^2$ subject to $\sum_{j=1}^n X_{ij} = u_i$, $\sum_{i=1}^m X_{ij} = v_j$, and $X_{ij} \geq 0$, for $i = 1, \dots, m$, and $j = 1, \dots, n$.

On the other hand, in [11] a generalization of Problem 1.1 to K -dimensional arrays ($K \geq 2$) was described and explicitly solved as follows.

For given positive integers K, d_1, d_2, \dots, d_K ($K \geq 2$), let \mathcal{K} be the set of the first K positive integers and let G be the grid

$$I^1 \times I^2 \times \dots \times I^K,$$

where I^k ($k \in \mathcal{K}$) denotes the set of the first d_k positive integers. Further, let $A : G \rightarrow \mathbb{R}$ be a K -dimensional array of real numbers over G , and for every $k \in \mathcal{K}$ let

$$\hat{b}_k = (\hat{b}_{k1}, \hat{b}_{k2}, \dots, \hat{b}_{kd_k}) : I^k \rightarrow \mathbb{R}$$

be a one-dimensional array of real numbers. Finally, letting α denote an element (i_1, \dots, i_K) of G , $W := \{(k, \ell) \mid k \in \mathcal{K}, \ell \in I^k\}$ and $S_{k\ell} := \{\alpha \in G \mid i_k = \ell\}$, consider

Problem 1.3.

$$P_K \begin{cases} \text{minimize} & \sum_{\alpha \in G} (X_\alpha - A_\alpha)^2 \\ \text{subject to} & \sum_{\alpha \in S_{k\ell}} X_\alpha = \hat{b}_{k\ell}, (k, \ell) \in W. \end{cases}$$

Note that adding non-negativity constraints to the norm minimization problem P_K yields an axial transportation polytope as defined in Yemeli

chev et al. [13], which has been object of numerous studies (see for example [9], and references therein). Assuming feasibility, namely,

$$\sum_{\ell \in I^j} \hat{b}_{j\ell} = \sum_{\ell \in I^k} \hat{b}_{k\ell} =: \hat{\varphi},$$

for every $j, k \in \mathcal{K}$, the following result arises.

Theorem 1.1. [11] Romero The optimal solution $X^* = (X_{i_1, \dots, i_K}^*)$ to P_K is given by

$$X_{i_1, \dots, i_K}^* = A_{i_1, \dots, i_K} + \frac{1}{\Omega} \left[\sum_{j=1}^K d_j b_{ji_j} - (K-1)\varphi \right],$$

$$(i_1, \dots, i_K) \in G,$$

where $\varphi = \hat{\varphi} - \sum_{\alpha \in G} A_\alpha$, $\Omega = \prod_{k=1}^K d_k$, and $b_{k\ell} = \hat{b}_{k\ell} - \sum_{\alpha \in S_{k\ell}} A_\alpha$ for $(k, \ell) \in W$.

The aim of this paper is twofold: first to generalize Theorem 1.1, then to tackle Problem 1.2 by algorithmic means, both considering the minimization of the quadratic functional that arises when the arrays are replaced by L_2 -Hilbert spaces as is explained now.

Let $B \in \mathbb{R}^K$ be the K -box $B \equiv [0, d_1] \times \dots \times [0, d_K]$, and $B_{x_j}^{(j)} \in \mathbb{R}^K$, for $x_j \in [0, d_j]$, be the slice

$$B_{x_j}^{(j)} \equiv [0, d_1] \times \dots \times [0, d_{j-1}] \times \{x_j\} \times [0, d_{j+1}] \times \dots \times [0, d_K].$$

Also, we denote by $\text{vol}(B) \equiv \prod_{j=1}^K d_j$ the K -dimensional content of box B , and by

$$\text{vol}(B_{x_j}^{(j)}) \equiv \prod_{k=1, k \neq j}^K d_k$$

the $(K-1)$ -dimensional content of slice $B_{x_j}^{(j)}$. As the content of $\text{vol}(B_{x_j}^{(j)})$ is independent of x_j we write $\text{vol}(B^{(j)})$ instead of $\text{vol}(B_{x_j}^{(j)})$. Now, consider the space of *observable* real functions

$$\mathbb{Y} \equiv L_2[0, d_1] \times \dots \times L_2[0, d_K], \quad (1)$$

where $L_2[0, d_j]$ is the classical space of quadratic integrable real functions in the Lebesgue sense over $[0, d_j]$, equipped with the inner product $\langle y, z \rangle_{\mathbb{Y}} \equiv \sum_{j=1}^K \int_0^{d_j} z(x_j) y(x_j) dx_j$. Clearly, \mathbb{Y} is a Hilbert space. We take as *reconstruction* space the classical space $L_2(B)$ of the quadratic integrable real functions in the Lebesgue sense over B , equipped with the usual inner product $\langle X, Y \rangle_{L_2(B)} \equiv \int_B Y(\underline{x}) X(\underline{x}) d\underline{x}$.

Problem 1.4. *Given the observable functions $f_j \in L_2[0, d_j]$ of X , for $j = 1, \dots, K$, find $X \in L_2(B)$ minimizing $\Psi(X) \equiv \frac{1}{2} \|X\|_{L_2(B)}^2$, subject to linear integral constraints*

$$\int_{B^{(j)}} X(\underline{x}) d\underline{x}^{[j]} = f_j(x_j), \quad (2)$$

$$x_j \in [0, d_j], \quad j = 1, \dots, K,$$

where $d\underline{x}^{[j]} \equiv dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_K$.

Our aim in this paper is twofold. First, we study the Problem 1.4 and then we discuss the natural generalization of Problem 1.2 in an infinite dimensional context. In Section 3, we provide an operator formulation of Problem 1.4, which is used in Section 3 to furnish an explicit formula for its solution. In Section 4, a natural generalization to Problem 1.2 is given, and it is solved by a polynomial algorithm relying on a discretization of the problem. Finally, Section 5 is devoted to our conclusions.

Operator formulation

We start by reformulating Problem 1.4 in terms of continuous linear operator

$$\begin{aligned} R_j[X](p) &\equiv R[X](\hat{e}_j, p) \\ &= \int_{B_p^{(j)}} X(x_1, \dots, x_{j-1}, p, x_{j+1}, \dots, x_K) d\underline{x}^{[j]} \\ &= \int_{B_p^{(j)}} X(\underline{x}) d\underline{x}^{[j]}. \end{aligned}$$

close related with the Radon transform

$$R[X](\omega, p) = \int_{\omega \cdot \underline{x} = p} X(\underline{x}) d\underline{x}$$

where $\omega \in S^{K-1}$, namely, the unit sphere in \mathbb{R}^K , and p is a real number¹.

Proposition 2.1. *The linear transforms*

$$R_j : L_2(B) \rightarrow L_2[0, d_j],$$

for $j = 1, \dots, K$, are continuous.

Proof. For $X \in L_2(B)$, the Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} |R_j[X](p)|^2 &= \left| \int_{B_p^{(j)}} 1 \cdot X(\underline{x}) d\underline{x}^{[j]} \right|^2 \\ &\leq \int_{B_p^{(j)}} |1 \cdot X(\underline{x})|^2 d\underline{x}^{[j]} \\ &\leq \left| \left(\int_{B_p^{(j)}} 1 d\underline{x}^{[j]} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_p^{(j)}} |X(\underline{x})|^2 d\underline{x}^{[j]} \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2 \\ &= \text{vol}(B^{(j)}) \int_{B_p^{(j)}} |X(\underline{x})|^2 d\underline{x}^{[j]} \end{aligned}$$

Consequently,

$$\|R_j[X]\|_{L_2[0, d_j]}^2 \leq \int_0^{d_j} \left(\text{vol}(B^{(j)}) \int_{B_p^{(j)}} |X(\underline{x})|^2 d\underline{x} \right) dp$$

where the right-hand side becomes

$$\begin{aligned} &\text{vol}(B^{(j)}) \int_0^{d_j} \left(\int_{B_p^{(j)}} |X(\underline{x})|^2 d\underline{x}^{[j]} \right) dp \\ &= \text{vol}(B^{(j)}) \int_B |X(\underline{x})|^2 d\underline{x}. \end{aligned}$$

So, we get that $R_j[X] \in L_2[0, d_j]$, and

$$\|R_j[X]\|_{L_2[0, d_j]} \leq (\text{vol}(B^{(j)}))^{1/2} \|X\|_{L_2(B)},$$

and the proposition follows. \square

Now, in terms of the *observational* operator $A : L_2(B) \rightarrow \mathbb{Y}$ given by

$$A[X] \equiv \begin{bmatrix} R_1[X] \\ \vdots \\ R_K[X] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

we see that Problem 1.4 can be reformulated as

¹See Natterer Natterer [8] and Helgason Helgason [4] for applications of the Radon transform in Computerized Tomography, and in Integral Geometry and Partial Differential Equations, respectively.

Problem 2.1. Given $f \in \mathbb{Y}$, find $X \in L_2(B)$ minimizing $\phi(X) \equiv \frac{1}{2} \|X\|_{L_2(B)}^2$ and subject to $A[X] = f$.

Proposition 2.2. A sufficient and necessary condition for Problem 2.1 to be feasible is

$$\varphi = d_1 \bar{f}_1 = d_2 \bar{f}_2 = \dots = d_K \bar{f}_K, \quad (4)$$

where $\bar{f}_j \equiv \frac{1}{d_j} \int_0^{d_j} f_j(x_j) dx_j$ is the mean value of f_j on $[0, d_j]$, for $j = 1, \dots, K$.

Proof. Let $X \in L_2(B)$ be a feasible solution of Problem 2.1. Then, by Fubini's theorem,

$$\begin{aligned} \int_B X d\underline{x} &= \int_0^{d_j} \left(\int_{B^{(j)}} X d\underline{x}^{[j]} \right) dx_j \\ &= \int_0^{d_j} f_j(x_j) dx_j = d_j \bar{f}_j, \end{aligned}$$

for $j = 1, \dots, K$.

Thus, we get (4).

To prove the sufficiency, let $f \in \mathbb{Y}$ satisfy the feasibility condition (4), take

$$X(\underline{x}) = \varphi^{-(K-1)} \prod_{j=1}^K f_j(x_j),$$

and apply the Fubini theorem to obtain

$$\begin{aligned} R_j[X](x_j) &= \int_{B^{(j)}} X d\underline{x}^{[j]} \\ &= \int_{B^{(j)}} \varphi^{-(K-1)} f_j(x_j) \prod_{\substack{i \neq j \\ i=1 \\ i=K}}^K f_i(x_i) d\underline{x}^{[j]} \\ &= \varphi^{-(K-1)} f_j(x_j) \int_{B^{(j)}} \prod_{\substack{i \neq j \\ i=1 \\ i=K}}^K f_i(x_i) d\underline{x}^{[j]} \\ &= \varphi^{-(K-1)} f_j(x_j) \prod_{i \neq j}^K \int_{L_2[0, d_i]} f_i(x_i) dx_i \\ &= \varphi^{-(K-1)} f_j(x_j) \left(\prod_{i \neq j}^K d_i \bar{f}_i \right) \end{aligned}$$

so that $R_j[X](x_j) = f_j(x_j)$, for $j = 1, \dots, K$. Hence, the set of feasible solutions is not empty. \square

Corollary 2.1. If (4) holds for $f \in \mathbb{Y}$ given, then the set of feasible solutions of Problem 2.1 is an affine subspace of $L_2(B)$.

Proof. It follows directly from propositions 2.1 and 2.2. \square

Proposition 2.3. Problem 2.1 has a unique optimal solution $\hat{X} \in \mathcal{L}_2(B)$. Further, if the operator AA^* is invertible, where A^* is the adjoint of operator A , then

$$\hat{X} = A^*(AA^*)^{-1}[f]. \quad (5)$$

In other words, if P is the orthogonal projection operator over $N(A)^\perp$ then $P = A^*(AA^*)^{-1}$.

Proof. See Luenberger [7], section 6.10. \square

Problem solution

In this section we obtain an explicit solution to Problem 2.1 (or, equivalently, to Problem 1.4).

Lemma 3.1. The adjoint operator $A^* : \mathbb{Y} \rightarrow L_2(B)$ of A is linear, continuous, and given by

$$A^*[f](\underline{x}) \equiv \sum_{j=1}^K f_j(x_j). \quad (6)$$

Proof. From the general theory of linear continuous operators in Hilbert spaces (Luenberger [7], page 151), the adjoint A^* of A given by (3) is also a linear continuous operator, and

$$\|A^*\|_{L(\mathbb{Y}, L_2(B))} = \|A\|_{L(L_2(B), \mathbb{Y})}.$$

Now, observing that

$$\begin{aligned} \langle A[X], f \rangle_{\mathbb{Y}} &= \sum_{j=1}^K \int_0^{d_j} f_j(x_j) R_j[X](x_j) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^K \int_0^{d_j} f_j(x_j) \left(\int_{B^{(j)}} X(\underline{x}) d\underline{x}^{[j]} \right) dx_j \\ &= \int_0^{d_j} \int_{B^{(j)}} X(\underline{x}) \left(\sum_{j=1}^K f_j(x_j) \right) d\underline{x}^{[j]} dx_j \\ &= \int_B X(\underline{x}) \left(\sum_{j=1}^K f_j(x_j) \right) d\underline{x} \\ &= \langle X, A^*[f] \rangle_{L_2(B)} \end{aligned}$$

we get $A^*[f](\underline{x}) \equiv \sum_{j=1}^K f_j(x_j)$. \square

Corollary 3.1. $\ker(A)^\perp = \{X \in L_2(B) \mid X(\underline{x}) = \sum_{j=1}^K f_j(x_j), f \in \mathbb{Y}\}$.

Proof. It follows directly from the known fact $\ker(A)^\perp = \text{im}(A^*)$ (Luenberger [7], page 156), and Lemma 3.1. \square

Lemma 3.2. *The operator $AA^* : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ is linear, continuous, and given by*

$$AA^*[f](\underline{x}) \equiv \begin{bmatrix} v(B^{(1)})(f_1(x_1) + \sum_{j \neq 1}^K \bar{f}_j) \\ v(B^{(2)})(f_2(x_2) + \sum_{j \neq 2}^K \bar{f}_j) \\ \vdots \\ v(B^{(K)})(f_K(x_K) + \sum_{j \neq K}^K \bar{f}_j) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Proof. Since AA^* is the composition of linear continuous operators, it is a linear continuous operator itself. Now, we have

$$\begin{aligned} (AA^*)[f](\underline{x}) &= A(A^*[f])(\underline{x}) \\ &= A[\sum_{j=1}^K f_j(x_j)] \\ &= \begin{bmatrix} R_1[\sum_{j=1}^K f_j(x_j)] \\ \vdots \\ R_K[\sum_{j=1}^K f_j(x_j)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} R_k \left[\sum_{j=1}^K f_j(x_j) \right] &= \int_{B_{x_k}^{(k)}} \left(\sum_{j=1}^K f_j(x_j) \right) d\tilde{x}^{[k]} \\ &= \sum_{j=1}^K \int_{B_{x_k}^{(k)}} f_j(x_j) d\tilde{x}^{[k]} \\ &= \text{vol}(B^{(k)}) f_k(x_k) \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \int_{B_{x_k}^{(k)}} f_j(x_j) d\tilde{x}^{[k]}. \end{aligned} \quad (9)$$

Besides, for $j \neq k$:

$$\begin{aligned} &\int_{B_{x_k}^{(k)}} f_j(x_j) d\tilde{x}^{[k]} \\ &= \int_{B^{(j,k)}} \left(\int_0^{d_k} f_j(x_j) dx_j \right) d\tilde{x}^{[j,k]} \\ &= \int_{B^{(j,k)}} (d_j \bar{f}_j) d\tilde{x}^{[j,k]} \\ &= \text{vol}(B^{(k)}) \bar{f}_j, \end{aligned} \quad (10)$$

where² $B^{(j,k)} = \prod_{\ell \neq j,k} [0, d_\ell]$, and in $d\tilde{x}^{[j,k]}$ all differentials dx_ℓ appear whenever $\ell \neq j, k$. Thus, (7) follows from (8), (9), and (10). \square

²For $j < k$ we write $B^{(j,k)} = \prod_{\ell \neq j,k} [0, d_\ell]$ instead of $B_{x_j, x_k}^{(j,k)} = [0, d_1] \times \cdots \times [0, d_{j-1}] \times \{x_j\} \times [0, d_{j+1}] \times \cdots \times [0, d_{k-1}] \times \{x_k\} \times [0, d_{k+1}] \times \cdots \times [0, d_K]$. A similar consideration is applied for $k < j$.

Lemma 3.3. $\mathbb{W} = \{f \in \mathbb{Y} \mid (4) \text{ is satisfied} \}$ is a closed linear subspace of \mathbb{Y} and it is invariant under AA^* .

Proof. If $f, g \in \mathbb{W}$ then $\varphi = d_1 \bar{f}_1 = \cdots = d_K \bar{f}_K$ and $\psi = d_1 \bar{g}_1 = \cdots = d_K \bar{g}_K$, obtaining $\varphi + \psi = d_1 \bar{f}_1 + d_1 \bar{g}_1 = \cdots = d_K \bar{f}_K + d_K \bar{g}_K$, and $f + g \in \mathbb{W}$. Similarly, for $\alpha \in \mathbb{R}$ we have $\alpha f \in \mathbb{W}$. Hence, \mathbb{W} is a linear subspace of \mathbb{Y} . Further, the set $\mathbb{W}_{j,k} = \{f \in \mathbb{Y} \mid \int_0^{d_j} f_j dx_j = \int_0^{d_k} f_k dx_k\}$, $j \neq k$, is clearly closed in \mathbb{Y} , and since \mathbb{W} is a finite intersection of the closed sets $\mathbb{W}_{j,k}$, $j \neq k$, it follows that \mathbb{W} is also closed. To prove that \mathbb{W} is invariant under AA^* , from Lemma 3.2 it is sufficient to show that, for $f \in \mathbb{W}$,

$$\int_0^{d_k} \text{vol}(B^k) \left(f(x_k) + \sum_{j \neq k}^k \bar{f}_j \right) dx_k$$

has a constant value, independent of k . In fact, we have

$$\begin{aligned} &\int_0^{d_k} \text{vol}(B^k) \left(f(x_k) + \sum_{j \neq k}^K \bar{f}_j \right) dx_k \\ &= \text{vol}(B^k) \left(\varphi + d_k \sum_{j \neq k}^K \varphi / d_j \right) \\ &= \varphi \text{vol}(B^k) \left(1 + d_k \sum_{j \neq k}^K 1/d_j \right) \\ &= \varphi \text{vol}(B^k) \left(1 + \frac{\sum_{j \neq k}^K \text{vol}(B^j)}{\text{vol}(B^k)} \right). \end{aligned}$$

This is to say

$$\begin{aligned} &\int_0^{d_k} \text{vol}(B^k) \left(f(x_k) + \sum_{j \neq k}^K \bar{f}_j \right) dx_k \\ &= \left(\sum_{j=1}^K \text{vol}(B^j) \right) \varphi, \end{aligned}$$

and the proof is completed. \square

Proposition 3.1. *The linear operator $AA^* : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ restricted to observable functions $f \in \mathbb{W}$ is invertible and given by*

$$(AA^*)^{-1}[f](\underline{x}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{f_1(x_1)}{\text{vol}(B^{(1)})} + \frac{\sum_{k \neq 1}^K \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)})} \\ \vdots \\ \frac{f_K(x_K)}{\text{vol}(B^{(K)})} + \frac{\sum_{k \neq K}^K \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)})} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Proof. By Lemma 3.2, $(AA^*)[f] = 0$ implies, for $j = 1, \dots, K$,

$$f_j(x_j) + \sum_{k=1, k \neq j}^K \bar{f}_k = 0, \quad (12)$$

which leads to

$$f_j(x_j) = \bar{f}_j. \quad (13)$$

and $d_j \bar{f}_j + d_j \sum_{k=1, k \neq j}^K \bar{f}_k = 0$. So, using the solubility conditions (4), from (12) and (13) we get

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{f}_j + \sum_{k \neq j}^K \bar{f}_k \\ &= \bar{f}_j + \sum_{k \neq j}^K \frac{d_j}{d_k} \bar{f}_j \\ &= \bar{f}_j + d_j \bar{f}_j \sum_{k \neq j}^K \frac{1}{d_k} \\ &= \bar{f}_j + \bar{f}_j \frac{\sum_{k \neq j}^K \text{vol}(B^{(k)})}{\text{vol}(B^{(j)})}, \end{aligned}$$

which comes to $0 = \left(\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)}) \right) \bar{f}_j$, and we have $f_j(x_j) \equiv \bar{f}_j = 0$, for $j = 1, \dots, K$. Therefore, $f \in N(AA^*)$ leads to $f = 0$ and so AA^* is invertible.

Now, taking $f(\underline{x}) = (AA^*)[z](\underline{x})$ with $z \in \mathbb{Y}$ satisfying the solubility conditions (4), and applying Lemma 3.2 leads to

$$f_j(x_j) = \text{vol}(B^{(j)}) \left(z_j(x_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \bar{z}_k \right), \quad (14)$$

for $j = 1, \dots, K$.

Hence,

$$z_j(x_j) = \frac{f_j(x_j)}{\text{vol}(B^{(j)})} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \bar{z}_k. \quad (15)$$

From (14) we have

$$\begin{aligned} d_j \bar{f}_j &= \int_0^{d_j} f(x_j) dx_j \\ &= \text{vol}(B) \left(\bar{z}_j + \sum_{k=1, k \neq j}^K \bar{z}_k \right), \end{aligned}$$

thus

$$\bar{f}_j = \text{vol}(B^{(j)}) \left(\bar{z}_j + \sum_{k=1, k \neq j}^K \bar{z}_k \right).$$

Now, using the solubility conditions $d_k \bar{z}_k = d_j \bar{z}_j$, for all k, j , we have

$$\begin{aligned} \bar{f}_j &= \text{vol}(B^{(j)}) \bar{z}_j + \left(\sum_{k=1, k \neq j}^K \frac{d_j \text{vol}(B^{(j)})}{d_k} \right) \bar{z}_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)}) \right) \bar{z}_j. \end{aligned}$$

Thus, $\bar{z}_j = \frac{\bar{f}_j}{\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)})}$ and

$$\sum_{k=1, k \neq j}^K \bar{z}_k = \frac{\sum_{k=1, k \neq j}^K \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)})}. \quad (16)$$

Therefore, (11) follows from (15) and (16), and the proof is complete. \square

Theorem 3.1. *If $f \in \mathbb{W}$ then the unique solution of Problem 2.1 is*

$$\hat{X}(\underline{x}) = \frac{\sum_{j=1}^K d_j f_j(x_j) - (K-1)\varphi}{\text{vol}(B)}. \quad (17)$$

Proof. From Propositions 2.3 and 3.1, $\hat{X} = A^*(AA^*)^{-1}[f]$ is the solution of Problem 2.1. Thus applying Lemma 3.1 and Proposition 3.1 we get

$$\begin{aligned} \hat{X}(\underline{x}) &= A^*(AA^*)^{-1}[f](\underline{x}) \\ &= A^* \begin{bmatrix} \frac{f_1(x_1)}{\text{vol}(B^{(1)})} + \frac{\sum_{k=1, k \neq K}^K \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)})} \\ \vdots \\ \frac{f_K(x_K)}{\text{vol}(B^{(K)})} + \frac{\sum_{k=1, k \neq K}^K \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^K \text{vol}(B^{(k)})} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Therefore, an explicit solution of the quadratic optimization problem with linear constraints (2) is given by

$$\hat{X}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^K \frac{f_j(x_j)}{\text{vol}(B^{(j)})} - (K-1) \frac{\sum_{j=1}^K \bar{f}_j}{\sum_{j=1}^K \text{vol}(B^{(j)})}$$

or by

$$\begin{aligned}\hat{X}(x) &= \frac{1}{\text{vol}(B)} \sum_{j=1}^K d_j f_j(x_j) \\ &- (K-1) \frac{\sum_{j=1}^K \bar{f}_j}{\sum_{j=1}^K \text{vol}(B^{(j)})}.\end{aligned}$$

Now, substituting $\bar{f}_j = \varphi/d_j$, for all j , we obtain (17) after a trite simplification. \square

Theorem 3.1 generalizes the solution given by Romero [11] for this problem in the finite dimension case (see Theorem 1.1), which is continuous if the observable functions are continuous. Our next result establishes that Problem 2.1 is well-posed in the Hadamard sense.

Proposition 3.2. *If $f \in \mathbb{W}$ then*

$$\|\hat{X}\|_{L_2(B)} \leq \|f\|_{\mathbb{Y}}.$$

Proof. It follows directly from Proposition 2.3, and from the fact that every orthogonal projection operator P has norm equal to the unity. \square

Non-Negativity constraints case

In this section we still consider Problem 2.1, this time incorporating non-negative constraints over $X \in L_2(B)$. More specifically, we discuss

Problem 4.1. *Given $f \in \mathbb{Y}$, find $X \in L_2(B)$ minimizing $\phi(X) = \frac{1}{2}\|X\|_{L_2(B)}^2$, subject to $A[X] = f$, and $X \geq 0$ almost everywhere in B .*

Subsection 4.1 is devoted to prove that this problem is well-posed in the Hadamard's sense. Then, in Subsection 4.2 we propose a polynomial procedure to approach the optimal solution of the two-dimensional case of Problem 4.1.

Feasibility

Clearly, $C_0 = \{X \in L_2(B) \mid X \geq 0 \text{ almost everywhere in } B\}$ is a non-empty closed cone, and under feasibility conditions (4) $C_f = \{X \in L_2(B) \mid A[X] = f\}$ is a non-empty, closed linear manifold.

Lemma 4.1. $N(A) \subsetneq \{X \in L_2(B) \mid \bar{X} = 0\}$.

Proof. Let $X \in N(A)$ be given. Then, as $R_j[X](x_j) \equiv 0$ implies $\bar{R}_j[X] = 0$, for $j = 1, \dots, K$, by the Fubini theorem we get

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{d_j} R_j[X](x_j) dx_j \\ &= \int_0^{d_j} \left(\int_{B^j} X(\underline{x}^{[j]}, x_j) d\underline{x}^{[j]} \right) dx_j \\ &= \int_B X(\underline{x}) d\underline{x},\end{aligned}$$

where for convenience we have written

$$R_j[X](x_j) = \int_{B^j} X(\underline{x}^{[j]}, x_j) d\underline{x}^{[j]}.$$

Hence, $\bar{X} = 0$, and $N(A) \subset \{X \in L_2(B) \mid \bar{X} = 0\}$.

Now, let $X \in L_2(B)$ be such that $\bar{X} = 0$. Applying the Fubini theorem again, we have

$$\begin{aligned}0 &= \int_B X(\underline{x}) d\underline{x} \\ &= \int_0^{d_j} \left(\int_{B^j} X(\underline{x}^{[j]}, x_j) d\underline{x}^{[j]} \right) dx_j \\ &= \int_0^{d_j} R_j[X](x_j) dx_j,\end{aligned}$$

thus $\bar{R}_j[X] = 0$ and $R_j(x_j) \not\equiv 0$, for $j = 1, \dots, K$. In conclusion, we come to $N(A) \subsetneq \{X \in L_2(B) \mid \bar{X} = 0\}$, and the proof is completed. \square

Proposition 4.1. *The closed subspace $N(A)$ is a support subspace at the origin of the positive cone set C_0 in $L_2(B)$.*

Proof. Clearly, the intersection of C_0 with the set $\{X \in L_2(B) \mid \bar{X} = 0\}$ is $X \equiv 0$. So, the proof of this proposition follows from Lemma 4.1. \square

Given $f \in \mathbb{Y}$, by $f \geq 0$ we mean $f_j(x_j) \geq 0$ almost everywhere in $[0, d_j]$, for $j = 1, \dots, K$.

Corollary 4.1. *If $f \in \mathbb{Y}$ satisfies the feasibility conditions (4) and $f \geq 0$ then $C_{(f)} = C_0 \cap C_f$ is non-empty set.*

Now, under the hypothesis of Corollary 4.1, $C_{(f)} = C_0 \cap C_f$ is a non-empty, closed linear subset. Namely, we can see Problem 4.1 as Problem

2.1 over the closed and convex subset C_0 , and Problem 4.1 thus consists in finding $X \in C_{(f)}$ that is closest to the origin $O \in \mathcal{L}_2(B)$. Therefore, Problem 4.1 can be seen as a special case ($F = 0$) of

Problem 4.2. *Let H be a Hilbert space, and $C \in H$ a closed and convex subset. Given $F \in H$, find $\hat{X} \in C$ such that*

$$\|F - \hat{X}\|_{L_2(B)} \leq \|F - X\|_{L_2(B)}, \quad \text{for all } X \in C.$$

The characterization of the solution to Problem 4.2 is given by the following result (for a proof, see Brézis [1], Siddiqi [12]).

Theorem 4.1. (*Convex Projection*) *Let H be a Hilbert space. If $C \subset H$ is a closed convex set then, given $F \in H$, Problem 4.2 has a unique solution $\hat{X} \in C$, characterized by the variational inequality*

$$\langle F - \hat{X}, X - \hat{X} \rangle_H \leq 0, \quad \text{for all } X \in C. \quad (18)$$

Furthermore, the mapping $P_C : H \rightarrow C$ given by $F \mapsto \hat{X}$ is a nonlinear projection operator satisfying

$$\|P_C G - P_C F\|_H \leq \|G - F\|_H. \quad (19)$$

Observe that the orthogonal projection is a particular case of the convex projection when the closed convex C is a closed subspace. In general, it appears very difficult to furnish an explicit solution to Problem 4.2, since to give an explicit expression of the convex projector P_C does not seem easy.

Coming back to Problem 4.1, from Theorem 4.1 it has an unique solution $\hat{X}^c \in \mathcal{L}_2(B)$ characterized by the variational inequality

$$\langle \hat{X}^c, X - \hat{X}^c \rangle_{L_2(B)} \geq 0, \quad \text{for all } X \in C_{(f)}, \quad (20)$$

which says that \hat{X}^c is orthogonal to $C_{(f)}$, and from which it is not obvious that \hat{X}^c depends continuously on $f \in \mathbb{Y}$.

To prove that \hat{X}^c depends continuously with respect to $f \in \mathbb{Y}$, it is convenient to first consider

some aspects of the problem data. We denote by $\mathbb{W}_0 \subset \mathbb{Y}$ the subset of all $f \in \mathbb{W}$ (see Lemma 3.3) with non-negative f_j components, namely, $f_j \geq 0$ almost everywhere in $[0, d_j]$, for $j = 1, \dots, K$.

Lemma 4.2. $im(A^*|_{\mathbb{W}_0}) \subset C_0$.

Proof. It is a direct consequence of Lemma 3.1. \square

Lemma 4.3. $im((AA^*)^{-1}|_{\mathbb{W}_0}) \subset C_0$.

Proof. It is a direct consequence of Proposition 3.1. \square

Theorem 4.2. *If \hat{X}_f^c and \hat{X}_g^c are the solutions to Problem 2.1 for f and $g \in \mathbb{W}_0$, respectively, then $\|\hat{X}_g^c - \hat{X}_f^c\|_{L_2(B)} \leq \|g - f\|_{\mathbb{Y}}$.*

Proof. If $h \in \mathbb{W}_0$, then $\hat{X}_h^c = \hat{X}_h$ follows from Lemmas 4.2 and 4.3. That is, when $h \in \mathbb{W}_0$ the convex and orthogonal projections of h coincide. So, applying Proposition 3.2 the proof is completed. \square

In other words, Problem 4.1 is well-posed in the Hadamard's sense.

Approximate solution for the 2-D case

Let us consider Problem 4.1 in the two-dimensional case; more specifically

Problem 4.3. *Given positive reals d_1, d_2 , and non-negative real functions $f(x), g(y)$, satisfying $\int_0^{d_1} f(x) dx = \int_0^{d_2} g(y) dy$, find a non-negative real function $h(x, y)$ that minimizes*

$$\int_0^{d_1} \int_0^{d_2} [h(x, y)]^2 dx dy,$$

subject to

$$\int_0^{d_1} h(x, y) dx = g(y), \quad \text{for } y \in [0, d_2],$$

and

$$\int_0^{d_2} h(x, y) dy = f(x), \quad \text{for } x \in [0, d_1].$$

We were not able to find an explicit solution to Problem 4.3. However, the polynomial procedure **A** below—strongly relying on the exact method proposed in [2] to solve Problem 1.2 for any m -by- n matrix—can be applied in case an approximate optimal solution suffices.

Lines (1)–(6) are aimed to first determine suitable discretization intervals Δ_1 and Δ_2 , where the parameter $\epsilon > 0$ is meant to control the desired accuracy level, and $\nu(w, h, d)$ denotes the integral of a function h in the interval $[0, d]$, approximated with the trapezoid rule on w points. The dimensions m and n of the working matrix are computed in line (7). Then, in lines (8)–(12) an approximation to the optimal solution $h^*(x, y)$ of Problem 4.3 is produced as $h'(x, y)$ for discretized values x, y . Note that vectors (u_1, \dots, u_m) and (v_1, \dots, v_n) are non-negative, and satisfy $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v_j$. They are taken as input to determine in line (11) the optimal solution X^* of Problem 1.2 with the polynomial method proposed in [2].

PROCEDURE **A**

```

(1)  $k_1 \leftarrow 2$ ; While
 $|\nu(k_1 + 1, f, d_1) - \nu(2k_1 + 1, f, d_1)| > \epsilon$ 
do  $k_1 \leftarrow 2k_1$ ;
(2)  $k_2 \leftarrow 2$ ; While
 $|\nu(k_2 + 1, g, d_2) - \nu(2k_2 + 1, g, d_2)| > \epsilon$ 
do  $k_2 \leftarrow 2k_2$ ;
(3)  $\Delta \leftarrow \min\{d_1/k_1, d_2/k_2\}$ ;
 $\Delta'_1 \leftarrow d_1/\lceil \frac{d_1}{\Delta} \rceil$ ;
 $\Delta''_1 \leftarrow d_1/\lfloor \frac{d_1}{\Delta} \rfloor$ ;
(4) If  $|\Delta - \Delta'_1| \leq |\Delta - \Delta''_1|$ 
then  $\Delta_1 \leftarrow \Delta'_1$ 
else  $\Delta_1 \leftarrow \Delta''_1$ ;
(5)  $\Delta'_2 \leftarrow d_2/\lceil \frac{d_2}{\Delta} \rceil$ ;  $\Delta''_2 \leftarrow d_2/\lfloor \frac{d_2}{\Delta} \rfloor$ ;
(6) If  $|\Delta - \Delta'_2| \leq |\Delta - \Delta''_2|$ 
then  $\Delta_2 \leftarrow \Delta'_2$ 
else  $\Delta_2 \leftarrow \Delta''_2$ ;
(7)  $m \leftarrow d_1/\Delta_1$ ;  $n \leftarrow d_2/\Delta_2$ ;
(8) For  $i \in \{1, \dots, m\}$  and  $j \in \{1, \dots, n\}$ 
do
 $x_i \leftarrow i\Delta_1$ ;  $y_j \leftarrow j\Delta_2$ ;
 $\psi_{ij} \leftarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} h(x, y) dy dx$ ;

```

```

(9) For  $i \in \{1, \dots, m\}$  do  $u_i \leftarrow \sum_{j=1}^n \psi_{ij}$ ;
(10) For  $j \in \{1, \dots, n\}$  do  $v_j \leftarrow \sum_{i=1}^m \psi_{ij}$ ;
(11) Find the optimal solution  $X^* = (X^*_{ij})$ 
to Problem 1.2;
(12) For  $i \in \{1, \dots, m\}$  and  $j \in \{1, \dots, n\}$  do
 $h'(i - \frac{\Delta_1}{2}, j - \frac{\Delta_2}{2}) \leftarrow \frac{X^*_{ij}}{\Delta_1 \Delta_2}$ .

```

Example. Let $f(x) = 496x^2 - 1984x + 1984$, $g(y) = 35y^3 - 455y^2 + 1470y + 70$, $d_1 = 5$, $d_2 = 8$. Since $\int_0^5 f(x) = \int_0^8 g(y) = 5786 + 2/3$, feasibility is verified. Fixing $\epsilon = 0.1$, lines (1)–(7) yield $k_1 = 2^7$, $k_2 = 2^8$, $\Delta = \min\{5/2^7, 8/2^8\} = 0.03125$, $\Delta_1 = 0.03125$, $\Delta_2 = 0.03125$, $m = 160$, and $n = 256$. Then, in line (8) we get vectors (u_1, \dots, u_{160}) and (v_1, \dots, v_{256}) , which in turn are used as the input data for the optimization process in line (9). Finally, line (10) obtains an approximate optimal solution, as depicted in Figure 1.

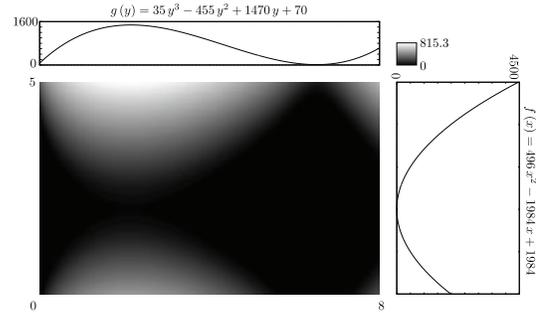


Figure 1: Approximate solution to Problem 4.3 for $f(x) = 496x^2 - 1984x + 1984$, $g(y) = 35y^3 - 455y^2 + 1470y + 70$, $d_1 = 5$, and $d_2 = 8$.

Conclusions

In this paper the problem of finding the closest point to the origin in transportation polytopes is studied in a Hilbert space framework. We show that this point can be found by the explicit formula (17). In the finite dimensional context, an analogous explicit formula was proposed by Romero [11].

We are not aware of an explicit solution to Problem 2.1 in case non-negative constraints are added. However, we establish its well-posedness as a direct consequence of the convex projection theorem.

Finally, a two-dimensional instance of Problem 2.1 with non-negative constraints is numerically solved by means of a discretization procedure based on the trapezoid rule, together with the exact, polynomial method proposed in [2].

References

- [1] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [2] G. Calvillo and D. Romero. On the closest point to the origin in transportation polytopes. *Discrete Applied Mathematics*, 210: 88–102, 2016.
- [3] W.E. Deming and F.F. Stephan. On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known. *Annals of Mathematical Statistics*, 11:427–444, 1940.
- [4] S. Helgason. *The Radon Transform*. Birkhauser, 2nd. Edition, 1999.
- [5] A.C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. SIAM, 2003.
- [6] D. Leblanc and M. Queyranne. Comparison of alternative methods of updating input-output tables: A note. *Technological Forecasting and Social Change*, 16:143–146, 1980.
- [7] D. Luenberger. *Optimization by Vector Spaces*. Wiley, 1969.
- [8] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [9] M. Queyranne and F. Spieksma. Multi-index transportation problems. In: *Floudas, C., Pardalos, P. (eds.), Encyclopedia of Optimization*, 2008.
- [10] A. Rogers, F. Willekens, and J. Raymer. Imposing age and spatial structure on inadequate migration-flow datasets. *The Professional Geographer*, 55(1):56–69, 2003.
- [11] D. Romero. Pagerank: Easy transportation-like problems on k-dimensional arrays. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 66(1): 137–147, 1990.
- [12] A.H. Siddiqi. *Applied Functional Analysis: Numerical Methods, Wavelet Methods, and Image Processing*. Dekker, 2004.
- [13] V.A. Yemelichev, M.M. Kovalev, and M.K. Kravtsov. *Polytopes, Graphs, and Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984.

Resolución de la Ecuación Unidimensional Homogénea de Aguas Someras por el Esquema de Lax-Wendroff

J. Alavez-Ramírez^{1*}, E.A. Ovando-Gerónimo¹

¹División Académica de Ciencias Básicas, UJAT

* Autor por correspondencia: justino.alavez@ujat.mx

Resumen

Se discute la discretización de las ecuaciones de Saint-Venant en una dimensión espacial, usando un esquema de Lax-Wendroff explícito para discretizar con respecto al tiempo t y un esquema de diferencia central de segundo orden para discretizar con respecto a la variable espacial x . Asimismo, se discute la implementación del esquema resultante en MATLAB para simular el desplazamiento de una joroba de agua.

Palabras clave: Ecuaciones de Saint-Venant; Discretización; Esquema de Lax-Wendroff explícito; Diferencia central de segundo orden; Simulación computacional.

Introducción

Las ecuaciones de Saint-Venant modelan el comportamiento del agua en ríos, canales, lagos, zonas costeras, y en general, en regiones poco profundas. Por tanto, constituyen una herramienta importante para el estudio de una gran variedad de problemas relacionados con la ingeniería costera, la oceanografía y los estudios medio ambientales, entre muchos otros, Vázquez-Cendón [8]. Las ecuaciones de Saint-Venant, también se conocen en la literatura como las ecuaciones de las aguas someras, [1], y en la literatura inglesa como *shallow water equations*, [5]. En dinámica de fluidos, el flujo de un fluido está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, [9]. Las ecuaciones de las aguas someras se pueden deducir de las ecuaciones de Navier-Stokes, y resultan ser una buena aproximación a las ecuaciones de movimiento del fluido cuando la densi-

dad del fluido es homogénea y la profundidad es pequeña en comparación con las distancias horizontales ([1], [2]).

Las ecuaciones homogéneas de las aguas someras en 1D están dadas por el sistema de ecuaciones ([3], [10]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $h = h(x, t)$ es la profundidad del agua (tirante o calado) en cada punto x en el dominio espacial al tiempo $t \geq 0$, la variable $u = u(x, t)$ representa el valor promedio turbulento temporal y promediada en profundidad de la velocidad horizontal del agua en cada punto x en el dominio espacial al tiempo $t \geq 0$, y g es la aceleración de la gravedad.

Definiendo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

el sistema (1) se puede escribir como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Discretización de (2)

Se discretizará el sistema (2) usando el esquema de Lax-Wendroff ([7], Strikwerda [6]), que está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{U}(x, t) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial t^2} + O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (3)$$

De (2) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial t} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{J}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix} \quad (5)$$

es la matriz Jacobiana de \mathbf{F} con respecto a \mathbf{U} . Sustituyendo (2) y (4) en (3) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{U}(x, t) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x} \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{J}(\mathbf{U}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x} \right) \\ &+ O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Ahora se discretizarán las derivadas espaciales que aparecen en (6) con un esquema de diferencia central de segundo orden, es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2). \quad (7)$$

Tomando

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{J}(\mathbf{U}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x},$$

resulta al usar los nodos $x - \Delta x/2$, x y $x + \Delta x/2$, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\mathbf{H}(x + \frac{\Delta x}{2}, t) - \mathbf{H}(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\Delta x} \\ &+ O((\Delta x)^2) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{ \mathbf{J}(\mathbf{U}(x + \frac{\Delta x}{2}, t)) \\ &[\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))] \\ &- \mathbf{J}(\mathbf{U}(x - \frac{\Delta x}{2}, t)) [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \\ &- \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))] \} + O(\Delta x). \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (6), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{U}(x, t) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) \\ &- \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))] + \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \{ \mathbf{J}(\mathbf{U}(x + \frac{\Delta x}{2}, t)) \\ &[\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))] \\ &- \mathbf{J}(\mathbf{U}(x - \frac{\Delta x}{2}, t)) [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \\ &- \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))] \} \\ &+ O((\Delta x)^2 \Delta t) + O((\Delta t)^2 \Delta x) \\ &+ O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Denotando por

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, \quad t^j = j\Delta t, \\ \mathbf{U}_i^j &= \mathbf{U}(x_i, t^j), \\ \mathbf{F}_i^j &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^j), \quad i \geq 0, j \geq 0, \\ \mathbf{U}_{i \pm \frac{1}{2}}^j &= \mathbf{U}(x_i \pm \frac{\Delta x}{2}, t^j), \\ \mathbf{J}_{i \pm \frac{1}{2}}^j &= \mathbf{J}(\mathbf{U}_{i \pm \frac{1}{2}}^j), \quad i \geq 1, j \geq 0, \end{aligned}$$

resulta de (9) que el esquema de Lax-Wendroff explícito y de segundo orden para la ecuación unidimensional homogénea de aguas someras es:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{j+1} = & \mathbf{U}_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(\mathbf{J}_{i+\frac{1}{2}}^j \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_i^j \right] \right. \\ & \left. - \mathbf{J}_{i-\frac{1}{2}}^j \left[\mathbf{F}_i^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \right) \end{aligned} \quad (10)$$

para todo $i \geq 1$ y para todo $j \geq 0$; donde las matrices Jacobianas $\mathbf{J}_{i\pm\frac{1}{2}}^j$ se aproximan por

$$\mathbf{J} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i\pm 1}^j) \right), \quad i \geq 1 \text{ y } j \geq 1,$$

para evitar evaluaciones en los puntos intermedios, [4].

Implementación computacional

Se resolverá numéricamente (2) sujeta a las condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{(1+d)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{d}\right)^2\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $0 \leq x \leq 4$, $d = \sqrt{0.05}$, $m = 2$, y a las condiciones de frontera:

$$\mathbf{U}(0, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{U}(4, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Discretizando los intervalos $[0, a]$ y $[0, b]$ por $N + 1$ y $M + 1$ puntos, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} x_i &= (i - 1)\Delta x \quad \text{y} \quad t^j = (j - 1)\Delta t, \\ i &= 1 : N + 1, \quad j = 1 : M + 1, \end{aligned}$$

donde $\Delta x = a/N$ y $\Delta t = b/M$, se obtiene un mallado rectangular de $[0, a] \times [0, b]$ con nodos (x_i, t^j) , $i = 1 : N + 1$ y $j = 1 : M + 1$.

El esquema de Lax-Wendroff explícito (10), se escribe ahora como:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{j+1} = & \mathbf{U}_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left\{ \mathbf{J} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i+1}^j) \right) \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_i^j \right] \right. \\ & \left. - \mathbf{J} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i-1}^j) \right) \left[\mathbf{F}_i^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

para todo $i = 2 : N$ y para todo $j = 1 : M + 1$.

Para facilitar la programación del esquema (11) en MATLAB/OCTAVE, es conveniente escribirlo para cada componente de \mathbf{U} . Para ello, si se escribe $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ dadas por (1) y (5), respectivamente, se convierten en

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ \frac{V^2}{U} + \frac{1}{2}gU^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gU - \frac{V^2}{U^2} & \frac{2V}{U} \end{pmatrix}.$$

Así, el esquema para la componente U será:

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} = & U_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[V_{i+1}^j - V_{i-1}^j \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[S(U_{i+1}^j, V_{i+1}^j) - 2S(U_i^j, V_i^j) \right. \\ & \left. + S(U_{i-1}^j, V_{i-1}^j) \right], \end{aligned}$$

para $i = 2 : N$ y $j = 1 : M + 1$; y el esquema para la componente V será:

$$\begin{aligned} V_i^{j+1} = & V_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[S(U_{i+1}^j, V_{i+1}^j) - S(U_{i-1}^j, V_{i-1}^j) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left\{ C \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i+1}^j, V_i^j + V_{i+1}^j) \right) \left[V_{i+1}^j - V_i^j \right] \right. \\ & + D \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i+1}^j, V_i^j + V_{i+1}^j) \right) \\ & \left[S(U_{i+1}^j, V_{i+1}^j) - S(U_i^j, V_i^j) \right] \\ & - C \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i-1}^j, V_i^j + V_{i-1}^j) \right) \left[V_i^j - V_{i-1}^j \right] \\ & - D \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i-1}^j, V_i^j + V_{i-1}^j) \right) \\ & \left. \left[S(U_i^j, V_i^j) - S(U_{i-1}^j, V_{i-1}^j) \right] \right\}, \end{aligned}$$

para $i = 2 : N$ y $j = 1 : M + 1$.

Resultados y conclusiones

La condición inicial del líquido bajo estudio, agua por ejemplo, simula una joroba centrada a la mitad del dominio como se muestra en la figura 1a. La altura inicial que describe la joroba está dada por

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{(1+d)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{d}\right)^2\right),$$

donde $0 \leq x \leq 4$, $d = \sqrt{0.05}$ y $m = 2$.

La velocidad inicial es idénticamente 0. Las condiciones de frontera corresponden a un tirante de 1 y velocidad 0 en ambos extremos del dominio espacial. La serie de imágenes que se muestran en la figura 1, representan la altura del agua en diferentes tiempos una vez iniciada la simulación. Es importante notar que la joroba comienza a disminuir su altura, se divide en dos y cada una de las partes avanza hacia los extremos del dominio espacial correspondiente (figuras 1b, 1c, 1d y 1e). Cada una de las jorobas se estrella con las fronteras del dominio (figura 1f), luego se regresan (figura 1g) hasta volverse a encontrar por el centro del dominio aproximadamente (figura 1h). El movimiento continúa pero las alturas de las olas generadas son cada vez más pequeñas (figura 1i), hasta alcanzar el estado estacionario a partir de los 2 s aproximadamente (figura 1j).

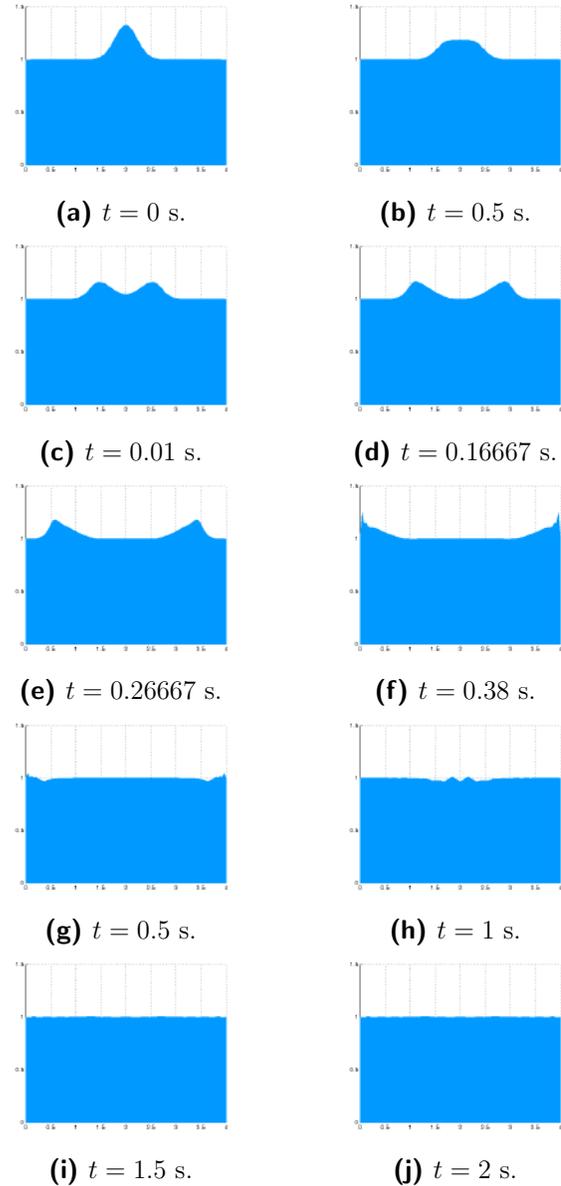


Figura 1: Serie de imágenes que muestran la altura del agua en diferentes tiempos una vez iniciada la simulación. Es importante notar que aproximadamente a los 2 s se alcanza el estado estacionario.

Referencias

- [1] J. Alavez-Ramírez, J. López-López, J.L. Hernández-López, and D. De la Fuente-Vicente. *Modelación Matemática y Computacional de una Inundación*. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2013. ISBN 978-607-606-122-0.
- [2] J.M. Fe-Marqués. *Aplicación del Método de Volúmenes Finitos a la Resolución Numérica de las Ecuaciones de Aguas Someras con Incorporación de los Esfuerzos Debidos a la Turbulencia*. PhD thesis, Universidade da Coruña, 2005.
- [3] P. García-Navarro, P. Brufau, J. Burguete, and J. Murillo. The Shallow Water Equations: An Example of Hyperbolic System. *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, 31:89–119, 2008.
- [4] S.G. Roberts. Numerical Solution of Conservation Laws Applied to the Shallow Water Wave Equations. AMSI Summer School 2013, Australian National University, 2013. URL https://maths-people.anu.edu.au/~steve/main_article-20130114.pdf.
- [5] Md. Saiduzzaman and S.K. Ray. Comparison of Numerical Schemes for Shallow Water. *Global Journal of Science Frontier Research*, 13(4):28–46, 2013. ISSN 0975-5896.
- [6] J.C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, second edition, 2004. ISBN 0-89871-567-9.
- [7] J.A. Trangenstein. *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-87727-5.
- [8] M.E. Vázquez-Cendón. *Estudios de Esquemas Descentrados para su Aplicación a las Leyes de Conservación Hiperbólicas con Término Fuente*. PhD thesis, Universidad de Santiago de Compostela, 1994.
- [9] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson Education Limited, second edition, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.
- [10] N.T. Vo-Thi. One Dimensional Saint-Venant System. Analysis of PDEs [math.AP], University of Orleans, 2008. URL <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00597434>.

Develación del dominio de un fluido de Stokes estacionario

Louis Breton Tenorio^{1*}, Jesus López Estrada¹

¹Facultad de Ciencias, UNAM

* Correo electrónico: louis.breton@ciencias.unam.mx, jelpze@gmail.com

Resumen

El problema de la develación o reconstrucción de un dominio tiene diversas aplicaciones, que van desde el diseño de piezas mecánicas en ingeniería hasta la detección de obstrucciones parciales en el flujo sanguíneo o tumores en medicina. En este trabajo se prueba que la solución de la ecuación de Stokes estacionaria, con condiciones de frontera de Dirichlet, es continua con respecto a su dominio de definición y no sólo con respecto a fuerzas externas y condiciones de frontera. También se presenta un estudio numérico sobre el problema inverso de flujo sanguíneo: *develación de una obstrucción parcial* en una cavidad tubular en 2D por donde fluye un fluido estacionario Newtoniano modelado por la ecuación de Stokes.

Palabras clave: Ecuación de Stokes; reconstrucción de dominio; problema bien planteado; deformaciones del dominio; problema inverso.

1. Introducción

El padecimiento de estenosis en arterias coronarias es un problema de salud pública de impacto mundial [1], pues el infarto al miocardio (heart attack, en inglés) es una de las causas principales de muerte en varios países del primer mundo, con una incidencia creciente en países en vías de desarrollo como México.

Estas enfermedades se deben a la formación de placas ateroscleróticas dentro de las paredes de las arterias coronarias a causa de la acumulación gradual de colesterol, ácidos grasos, calcio y tejido fibroso conectivo, entre otros. La presencia de estas placas ateroscleróticas dan lugar a una obstrucción local (estenosis u oclusión) al flujo sanguíneo con consecuencias fatales, como el infarto al miocardio, con frecuencia difícil de diagnosticar, causando en muchas ocasiones la muerte.

El paradigma de nuestro trabajo de investigación sobre el relevante problema de la detección temprana de estenosis en coronarias, o la prevención de infartos al miocardio, por medios no-invasivos, se basa en dos hechos físicos bien conocidos: Uno, la presencia de una obstrucción parcial (estenosis) en un ducto (coronaria) da lugar a un flujo sanguíneo turbulento post obstrucción. Dos, este flujo turbulento genera una onda acústica, que se propaga desde la pared del vaso coronario a través del tórax hasta alcanzar la superficie del pecho, donde se puede registrar con la ayuda de sensores especiales.

Siguiendo este paradigma, el problema de la detección temprana de estenosis en coronarias es abordado como un problema inverso, la de develar la obstrucción a partir de la información acústica registrada por sensores colocados sobre el pecho. La idea es ver a este problema inverso como un problema de estimación numérica

de parámetros en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's), que nos permitan develar una obstrucción en las paredes de vasos coronarios. El Sistema de EDP's para el correspondiente problema directo está constituido por las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo sanguíneo pulsátil que interactúa de manera especial con las paredes de los vasos coronarios (sub-problema de flujo-estructura) acopladas a las ecuaciones de propagación de ondas acústicas en un medio visco-elástico (biotejido) que se propagan a través de la cavidad torácica alcanzando la superficie del pecho.

Dada la complejidad de este problema que nos ocupa, en este trabajo se presentan alentadores resultados preliminares con respecto a un problema inverso de flujo sanguíneo simplificado, que en sí, constituye un nuevo paradigma alternativo al antes expuesto. Concretamente, la develación de una obstrucción en el ducto de un flujo sanguíneo modelado por la ecuación de Stokes en 2D, a partir de registros de la presión sobre ciertos puntos cercanos a la pared del ducto coronario. El problema se aborda a continuación en diferentes secciones. En la sección 2 se formula el problema, en la sección 3 se introduce la noción de convergencia de dominios mediante la convergencia de difeomorfismos. En las secciones 4 y 5 se establece que el problema directo de la ecuación de Stokes estacionaria con condiciones de frontera de Dirichlet depende continuamente de la forma de su dominio, resultado fundamental y sin el cuál carece de sentido abordar el problema inverso simplificado antes planteado. En la sección 6 se reporta un primer estudio numérico para el problema sobre la develación de una obstrucción sobre el ducto de un flujo viscoso modelado por la ecuación de Stokes en 2D, usando registros post-obstrucción de la presión. La sección 7 trata sobre el trabajo futuro de investigación sobre el problema que se estudia en este trabajo. Finalmente, en la sección 7 se exponen nuestras conclusiones.

2. Formulación del problema

En esta sección se presenta el planteamiento del problema.

2.1. Descripción de dominio

El dominio físico de definición en 2D para la ecuación estacionaria de Stokes es de la forma:

$$\Omega(b, c) = ([0, 30D] \times [0, D]) \setminus V(b, c)$$

y que ilustra en la siguiente figura:

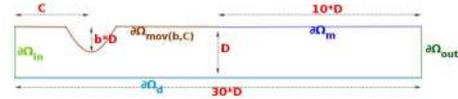


Figura 1: Representación geométrica del dominio $\Omega(b, c)$

donde la frontera de la obstrucción $V(b, c)$ sobre el borde superior está modelada paramétricamente por la función:

$$h(x) = D - \frac{b}{2} (1 - \cos(2\pi(x - c)/D))$$

$$|x - c| \leq D, \quad 0 < b < D < 2c$$

y $h(x) = D$, en otro caso. Este dominio ha sido propuesto por Seo et al. [2] y modela una arteria con una obstrucción parcial sobre una de sus paredes.

El objetivo en este trabajo consiste en investigar la viabilidad de resolver el problema de Stokes inverso siguiente: develar el tamaño b y la posición c de tal obstrucción, usando mediciones de la presión sobre el fluido en cierta parte de la frontera del dominio $\Omega(b, c)$, donde el flujo de un fluido viscoso está modelado por la ecuación de Stokes estacionaria:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 & x \in \Omega(b, c) \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & x \in \Omega(b, c) \end{cases} \quad (2.1)$$

Otro problema inverso de interés práctico consiste en vislumbrar el dominio $\Omega(b^*, c^*)$ y también en determinar el número y la ubicación óptima de los sensores de medición de la presión en un fluido viscoso de Stokes a través de un ducto con una obstrucción parcial. Para este problema el funcional objetivo a considerar sería:

$$J(b, c; \{x_i\}, N) = \sum_{i=1}^N |\bar{p}_{x_j} - \bar{v}_{x_j, \epsilon}(p(\cdot; b, c))|^\alpha$$

3. Problema de Stokes

Dado el planteamiento formulado en la sección anterior del problema inverso para develar una obstrucción parcial en el ducto por donde fluye un fluido viscoso estacionario de Stokes; o sea, vislumbrar la geometría del dominio $\Omega(b^*, c^*)$ a partir de mediciones de la presión, plantea la problemática central para su problema directo asociado: probar la dependencia continua de la solución del problema de Stokes (2.3) con respecto a su dominio $\Omega(a, b)$ y no sólo con respecto a f y φ .

Más precisamente, se quiere demostrar que la solución del problema de Dirichlet para la ecuación estacionaria de Stokes en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= f, & x \in \Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \varphi, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

depende continuamente con respecto a f , φ y su dominio Ω . En particular, en relación con Ω en el sentido siguiente: dada una sucesión de dominios Ω_n que converge, en sentido por precisar a Ω , entonces $(\mathbf{u}_{\Omega_n}^{f, \varphi}, p_{\Omega_n}^{f, \varphi}) \rightarrow (\mathbf{u}_{\Omega}^{f, \varphi}, p_{\Omega}^{f, \varphi})$.

Para tal propósito, se requiere primero establecer que este problema de Stokes es bien planteado con respecto a f y φ .

Cabe mencionar que un problema similar ha sido estudiado por A. Henrot y M. Pierre [4] para

la ecuación de Poisson con condiciones de frontera de Dirichlet *homogéneas*:

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u} &= f, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \varphi, & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

3.1. Formulación variacional

Para presentar la formulación variacional del problema de Stokes², es conveniente introducir ciertos espacios de funciones. Iniciemos con el espacio de funciones vectoriales de divergencia cero:

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega) \mid \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0\}$$

en donde $\mathbf{D}(\Omega) = [D(\Omega)]^n$. Y se definen a $\mathbf{V}(\Omega)$ y a $\mathbf{H}(\Omega)$ como las cerraduras de $\mathcal{V}(\Omega)$ en $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^n$ y $\mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^n$, respectivamente. Vale la pena enfatizar la siguiente caracterización de $\mathbf{V}(\Omega)$.

Teorema 3.1. *Si Ω es un dominio abierto, acotado y Lipschitz entonces*

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0\}$$

Para su demostración véase el Teorema 1.6 en R. Temam [3].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y de Lipschitz, la formulación variacional de la ecuación *estacionaria* de Stokes (ó problema de Stokes) con condiciones de frontera de Dirichlet *homogéneas*:

Hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega) \quad (3.2)$$

es directa de obtener:³

Teorema 3.2. *Temam [3] [Teorema 2.1] Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado de clase \mathcal{C}^2 , entonces el problema variacional (3.2), para toda $f \in$*

²En esta subsección se sigue a R. Temam [3].

³Véanse las páginas 21–22 en R. Temam [3].

$L^2(\Omega)$ (or $f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$) dada, tiene una única solución $\mathbf{u}_e \in \mathbf{V}(\Omega)$, satisfaciendo que

$$\|\mathbf{u}_e\|_V \leq C\|f\|_{L^2}$$

Además, existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que:

i) $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = f,$

ii) $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$ y

iii) $\gamma_0 \mathbf{u} = 0,$

en sentido distribucional en Ω . Y en donde $\gamma_0 : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ es el operador de traza de Dirichlet.

Este teorema dice que el problema de la ecuación de Stokes con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas, esencialmente tiene una única solución (\mathbf{u}_e, p_e) y que es, parcialmente un problema bien planteado a la Hadamard con respecto a las “fuerzas externas” f y su demostración es una consecuencia directa del Teorema de Lax-Milgram aplicado a la forma bilineal $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx$$

que es continua y coercitiva.

Para el problema de Stokes no homogéneo:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= f, & x \in \Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= g, & x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \varphi, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

con condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} g \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \nu \, dS \quad (3.4)$$

considerando que $\mathbf{H}^1(\partial\Omega) = \gamma_0 \mathbf{H}^1(\Omega)$, se tiene que existe $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 \mathbf{u}_0 = \varphi$. Luego, por la condición de compatibilidad (3.4) y aplicando el teorema de la divergencia, se sigue que:

$$\int_{\Omega} (g - \operatorname{div}(\mathbf{u}_0)) \, dx = 0.$$

Así, usando el siguiente Lema⁴

⁴Véase el Lema 2.4 en Temam [3].

Lema 3.1. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y Lipschitz entonces el operador gradiente mapea $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sobre

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} \equiv \{g \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} g \, dx = 0\}$$

existe $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{u}_1 = g - \mathbf{u}_0$. Ahora, tomando $w = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1$ el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas (3.3) se reduce al problema de Stokes con condiciones de Dirichlet homogéneas, ya antes tratado. Consecuentemente, la existencia y unicidad de su solución queda establecida.

Teorema 3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ o 3 de clase \mathcal{C}^r , $r = \max\{m + 2, 2\}$, donde $m \geq -1$ es un entero. Si $f \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, $g \in H^{m+1}(\Omega)$, y $\varphi \in \mathbf{H}^{m+3/2}(\partial\Omega)$ satisfaciendo las condiciones de compatibilidad (3.4) entonces el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas (3.3) tiene una única solución $\mathbf{u}_e \in \mathbf{H}^{m+2}(\Omega)$ y $p_e \in H^{m+1}(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_e\|_{H^{m+2}(\Omega)} + \|p_e\|_{H^{m+1}(\Omega)/\mathbb{R}} \\ \leq c_0 \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|g\|_{H^{m+1}(\Omega)} \right. \\ \left. + \|\varphi\|_{H^{m+3/2}(\partial\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

para una $c_0 > 0$.

Este teorema⁵ dice que el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas en dimensiones 2 y 3 es un problema bien-planteado a la Hadamard. Nótese que en nuestro caso, $g \equiv 0$.

3.2. Convergencia de dominios

Como el problema de Stokes con condiciones de Dirichlet no-homogéneas, se reduce al caso de condiciones de Dirichlet homogéneas, como se hizo notar en la anterior subsección, basta con demostrar que: $(\mathbf{u}_{\Omega_k}^f, p_{\Omega_k}^f) \rightarrow (\mathbf{u}_{\Omega}^f, p_{\Omega}^f)$ en algún sentido. Para ello, se introduce primero el tipo de convergencia entre dominios. Con este afán se dan las siguientes definiciones:

⁵Véase la Proposición 2.3 en Temam [3].

Definición 3.1. Una sucesión de conjuntos $\{\Omega_k\} \subset \mathbb{R}^n$ converge difeomórficamente a un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si existe una familia de difeomorfismos $\psi_k : \Omega \rightarrow \Omega_k$, $\{\psi_k\} \in C^2(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}_n)$, tal que:

$$\psi_k, \psi_k^{-1} \rightarrow id \text{ map, uniformemente; y}$$

$$\nabla \psi_k, \nabla \psi_k^{-1} \rightarrow I \text{ matriz, uniformemente.}$$

Definición 3.2. Una sucesión de dominios abiertos $\{\Omega_n\}$ converge compactamente a un dominio Ω si y sólo para todo compacto $K \subset \Omega$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \Omega_n$, para $n > n_0$.

Al espacio de dominios en \mathbb{R}^n se le puede equiparar con diversas topologías. A este respecto se recomienda la lectura de la brillante discusión que viene en el libro de A. Henrot y M. Pierre [4].

3.3. Resultados preliminares

Para abordar el problema que nos ocupa, esto es, que el problema de Stokes estacionario con condiciones de Dirichlet homogéneas es bien planteado, son útiles las siguientes definiciones y resultados sobre espacios de Sobolev y operadores de traza.

Proposición 3.1. [Lema 6.21 en Allaire [5]] Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos acotados y de Lipschitz. Si $\psi \in C^1$ un difeomorfismo tal que $\psi(\Omega) = \Omega'$ entonces

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega') \text{ si y sólo si } \mathbf{u} \circ \psi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

Más aún,

$$\nabla \mathbf{u} \circ \psi = (\nabla \psi)^{-t} \nabla (\mathbf{u} \circ \psi)$$

Proposición 3.2. Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ dominios acotados y de Lipschitz tales que existe un difeomorfismo $\psi \in C^1$ con $\psi(\Omega) = \Omega'$, y sea $\gamma^\Omega \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega))$ el operador de traza. Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega')$ entonces

$$\gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) \circ \psi = \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi)$$

Demostración.

Puesto que $C^1(\Omega')$ es denso en $H^1(\Omega')$, es suficiente probar la proposición para $C^1(\Omega')$. Sea $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)$ entonces:

$$\begin{aligned} \gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) \circ \psi &= \mathbf{u}|_{\partial\Omega'} \circ \psi \\ &= (\mathbf{u} \circ \psi)|_{\partial\Omega} \\ &= \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi) \end{aligned}$$

Como los operadores γ^Ω y $\gamma^{\Omega'}$ son continuos, utilizando la densidad de $C^1(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) \circ \psi = \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi)$$

para $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega')$. \square

Proposición 3.3. Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ dominios acotados y de Lipschitz. Si existe un difeomorfismo $\psi \in C^1$ tal que $\psi(\Omega) = \Omega'$ entonces

$$\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega') \text{ si y sólo si } \mathbf{u} \circ \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración.

Utilizando la proposición 3.1 sabemos que $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ si y sólo si $\mathbf{u} \circ \psi \in H_0^1(\Omega')$. Por lo tanto, sólo se tiene que probar que

$$\gamma^{\Omega'}(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \gamma^\Omega(\mathbf{u} \circ \psi) = 0$$

Pero ésto se sigue de la proposición 3.2 anterior. \square

4. Continuidad de la solución respecto a su dominio

En esta sección se discute un punto central con respecto al problema directo, el problema de Stokes que se ha venido discutiendo. Esto es, la dependencia continua de la solución del problema de Stokes con respecto a su dominio de definición. Explícitamente, se establece que si $\{\Omega_n \subset \mathbb{R}^n\}$ es una sucesión de dominios que converge difeomórficamente a un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, bajo ciertas condiciones, se tiene que

la solución $(\mathbf{u}_n, p_n) \in V(\Omega_n) \times L^2(\Omega_n)$ del problema de Stokes (3.2) en el dominio Ω_n converge a $(\mathbf{u}_\Omega, p_\Omega) \in V(\Omega) \times L^2(\Omega)$ en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\Omega - \mathbf{u}_n \circ \psi_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\rightarrow 0 \\ \|p_\Omega - p_n \circ \psi_n\|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde $(\mathbf{u}_\Omega, p_\Omega)$ es la solución del problema de Stokes (3.2) en el dominio Ω .⁶

Para tal propósito, primeramente se procederá a demostrar que la parte vectorial \mathbf{u}_n de la solución del problema de Stokes (3.1) con dominio Ω_n converge a la correspondiente parte vectorial de la solución del mismo problema de Stokes sobre el dominio Ω .

Nota 4.1. *Por simplicidad de los enunciados de los resultados que se verán en lo que sigue de este trabajo, se considerará que se tiene $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y que dada una secuencia $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de dominios acotados y de Lipschitz tal que $\Omega_n \subset D$ para toda n que converge difeomórficamente y compactamente a un dominio $\Omega \subset D$ acotado y Lipschitz. Más aún, se considerará a $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como la familia de difeomorfismos según la definición 3.1; es decir:*

$$\psi_n(\Omega) \rightarrow \Omega$$

4.1. Continuidad débil de la solución

Lema 4.1. *Dada $f \in L^2(D)$, sea $\mathbf{u}_n \in V(\Omega_n)$ la solución del problema de Stokes en formulación variacional (3.2). Si $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$ entonces*

$$1) \mathbf{w}_n \in H_0^1(\Omega)$$

$$2) \mathbf{w}_n \text{ está acotada}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} = 1$$

⁶Esto significa que si calculamos la solución de Stokes en un dominio Ω_n cercano a Ω entonces la composición de \mathbf{u}_n con un difeomorfismo $\psi_n(\Omega) \rightarrow \Omega_n$ está cerca a la solución \mathbf{u}_Ω .

Demostración.

1) Por la Proposición 3.3 se tiene que:

$$\mathbf{w}_n \in H_0^1(\Omega).$$

2) Viendo que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\psi_n^{-1}(\Omega_n)} |\nabla \mathbf{w}_n|_F^2 dx \\ &= \int_{\Omega_n} |\nabla \mathbf{w}_n|_F^2 \circ \psi_n^{-1} |det(\nabla \psi_n^{-1})| \end{aligned}$$

donde, para $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se tiene que $|A|_F^2 \equiv (A, A)$, con el producto interior de Frobenius $(A, B) \equiv Tr(B^t A)$. Luego, usando la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} |\nabla \mathbf{w}_n|_F^2 \circ \psi_n^{-1} &= (\nabla \mathbf{w}_n \cdot \nabla \mathbf{w}_n) \circ \psi_n^{-1} \\ &= ((\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n \cdot (\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n) \\ &= |(\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n|_F^2 \end{aligned}$$

Ahora, como $|AB|_F \leq |A|_2 |B|_F$ ⁷, y el hecho que $(\nabla \psi_n)^t$ y $|det(\nabla \psi_n^{-1})|$ son continuas, se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega_n} |(\nabla \psi_n)^t \nabla \mathbf{u}_n|_F^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| dx \\ &\leq \int_{\Omega_n} |(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |\nabla \mathbf{u}_n|_F^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| dx \\ &\leq \sup_{x \in \overline{\Omega_n}} (|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|) \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \overline{\Omega_n}} (|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|) \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}^2 \quad (4.2)$$

Puesto que $\nabla \psi_n \rightarrow I$ uniformemente, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| = 1$$

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ y $C^* > 0$ tal que si $n \geq N$

$$|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})| < C^* \quad (4.3)$$

⁷Recordando que, para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define $|A|_2 \equiv \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$, siendo $|\cdot|_2$, la norma euclidiana en \mathbb{R}^n .

Usando (4.3) en (4.2), si $n \geq N$, se sigue que:

$$\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{C^*} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} \quad (4.4)$$

Dado $C \in \mathbb{R}$ como en el Teorema 3.2 y por (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \sqrt{C^*} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} \\ &\leq \sqrt{C^*} C \|f\|_{L^2(D)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\mathbf{w}_n\}$ está acotada.

3) Usando (4.1), se tiene que

$$\frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} \leq \sup_{x \in \bar{\Omega}_n} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|} \quad (4.5)$$

De manera análoga se puede deducir que:

$$\left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^{-t}|_2^2 |det(\nabla \psi_n)|} \right)^{-1} \leq \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} \quad (4.6)$$

Otra vez, ya que $\nabla \psi_n, \nabla \psi_n^{-1} \rightarrow I$ uniformemente, se sigue que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^t|_2^2 |det(\nabla \psi_n^{-1})|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|(\nabla \psi_n)^{-t}|_2^2 |det(\nabla \psi_n)|} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomando los límites en (4.5), (4.6) y usando (4.7) se obtiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} = 1$$

□

Lema 4.2. Sea $f \in L^2(D)$ dada, $\mathbf{u}_n \in V(\Omega_n)$ la solución del problema variacional de Stokes y $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$. Si $\{\psi_n\}$ converge difeomórficamente a Ω . Entonces \mathbf{w}_n converge débilmente a $\mathbf{u}_\Omega \in V(\Omega)$ donde \mathbf{u}_Ω es solución del problema variacional de Stokes:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Demostración.

Por el Lema 4.1, la sucesión $\{\mathbf{w}_n\}$ tiene una subsucesión que converge débilmente a algún $\mathbf{w}^* \in H_0^1(\Omega)$. Por simplicidad, se renombrará a esta subsucesión como \mathbf{w}_n .

Sea

$\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega) \mid \text{div}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$, como $\Omega_n \rightarrow \Omega$ difeomórficamente, existe n_0 tal que $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_n)$, para $n > n_0$.

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Omega_n} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\psi_n(\Omega)} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \\ &= - \int_{\psi_n(\Omega)} \mathbf{u}_n \cdot \Delta \mathbf{v} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{w}_n \cdot (\Delta \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \, dx \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por definición $\psi_n \rightarrow id$, y $\nabla \psi_n \rightarrow I$ uniformemente y $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega)$. Luego, se sigue que:

$$(\Delta \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \rightarrow \Delta \mathbf{v}, \text{ uniformemente.} \quad (4.9)$$

Usando el hecho que \mathbf{w}_n converge débilmente a \mathbf{w}^* , se tiene de (2.9) que⁸:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} \mathbf{w}_n \cdot (\Delta \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{w}^* \cdot \Delta \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por otro lado, se tiene también que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f \cdot \mathbf{v}) \circ \psi_n |det(\nabla \psi_n)| \, dx \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

⁸Usando la siguiente desigualdad $|\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{w}_n| |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}| + |\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle|$

Ahora, tomando el límite en (4.8) y usando (4.10)-(4.11), se obtiene que:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$$

Nótese, sin embargo, que como $\mathcal{V}(\Omega)$ es denso en $V(\Omega)$, esto implica que:

$$\int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (4.12)$$

Para probar que $w^* \in V(\Omega)$, obsérvese que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\nabla \mathbf{u}_n \circ \psi_n) &= \text{Tr}(\nabla \mathbf{u}_n) \circ \psi_n \\ &= \text{div}(\mathbf{u}_n) \circ \psi_n \quad (4.13) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}_n \circ \psi_n &= \nabla \psi_n^{-t} \nabla (\mathbf{u}_n \circ \psi_n) \\ &= \nabla \psi_n^{-t} \nabla \mathbf{w}_n \quad (4.14) \end{aligned}$$

Substituyendo (4.14) en (4.13) se tiene que:

$$\text{Tr}(\nabla \psi_n^{-t} \nabla \mathbf{w}_n) = 0$$

Y puesto, $\nabla \psi_n^{-t} \nabla \mathbf{w}_n$ converge débilmente a $\nabla \mathbf{w}^*$, y Tr es un operador lineal y acotado⁹, se sigue que:

$$\text{div}(\mathbf{w}^*) = 0$$

Consecuentemente, se tiene $\mathbf{w}^* \in V(\Omega)$. Por (4.12) y el hecho que la solución del problema de Stokes tiene única solución se sigue que:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{u}_{\Omega}$$

□

4.2. Continuidad fuerte de la solución

Lema 4.3. *Sea $\Omega_n \subset D$, para toda n , $\Omega \subset D$ un dominio acotado y sea $f \in L^2(\Omega)$ dada. Si $f_n = f \circ \psi_n$ entonces*

- 1) $f_n \in L^2(\Omega)$
- 2) f_n converge fuertemente a f en $L^2(\Omega)$.

⁹ $\text{Tr} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^{n \times n}, L^2(\Omega))$

Demostración.

1) Nótese que:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\psi_n^{-1}(\Omega_n)} |f \circ \psi_n|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega_n} |f|^2 |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx \quad (4.15) \\ &\leq \sup_{x \in \overline{\Omega_n}} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \|f\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \\ &\leq C_{(n)} \|f\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \end{aligned}$$

donde $C_{(n)} = \sup_{x \in \overline{\Omega_n}} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| > 0$. Ya que $\nabla \psi_n^{-1}$ es continuo y $\overline{\Omega_n}$ es acotado. Luego, se sigue que

$$f_n \in L^2(\Omega)$$

2) Obsérvese, de (4.15), que:

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega_n} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \|f\|_{L^2(D)}^2 \\ \frac{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|f\|_{L^2(D)}^2} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega_n} |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \quad (4.16) \end{aligned}$$

Análogamente, se deduce que:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega} |\det(\nabla \psi_n)| \|f_n\|_{L^2(D)}^2 \\ &\frac{1}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \Omega} |\det(\nabla \psi_n)|} \leq \frac{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|f\|_{L^2(D)}^2} \quad (4.17) \end{aligned}$$

y puesto que $|\det(\nabla \psi_n)| \rightarrow 1$ uniformemente, tomando límite en (4.16)-(4.17), se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.18)$$

Por lo tanto, $\{f_n\}$ es acotado y tiene una subsucesión débilmente convergente a algún elemento f^* . Por comodidad, se renombrará a esta subsucesión como f_n .

Solo falta probar que $f^* = f$.

Si $g \in C_c(\Omega)$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g \in C_c(\Omega_n)$, si $n \geq N$.¹⁰ Observando que:

¹⁰Pues $\{\Omega_n\}$ converge compactamente a Ω .

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f_n g \, dx &= \int_{\Omega_n} f_n g \, dx \\
&= \int_{\psi_n^{-1}(\Omega)} f_n g \, dx \\
&= \int_{\Omega} (f_n \circ \psi_n^{-1})(g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx \\
&= \int_{\Omega} f (g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx
\end{aligned}$$

O sea:

$$\int_{\Omega} f_n g \, dx = \int_{\Omega} f (g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \, dx \quad (4.19)$$

puesto que $f_n = f \circ \psi_n$.

Y como $g \in C_c(\Omega)$, se sigue que $(g \circ \psi_n^{-1}) |\det(\nabla \psi_n^{-1})| \rightarrow g$ uniformemente. Pero también se tiene que $f_n \rightarrow f^*$ débilmente, por lo que tomando límites de ambos lados en (4.19), se obtiene que:

$$\int_{\Omega} f^* g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx$$

Dado que $g \in C_c(\Omega)$ es arbitraria y $C_c(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, se obtiene que:

$$f^* = f \quad (4.20)$$

O bien que f_n converge débilmente a f . Este hecho junto con (4.18) nos permiten concluir que:

$$f_n \rightarrow f \text{ in } L^2(\Omega)$$

□

Lema 4.4. Sea $f \in L^2(D)$ dada y sea \mathbf{u}_n la solución del problema de Stokes (3.2) en $V(\Omega_n)$, i.e.:

$$\int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega_n} f \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega_n)$$

Si $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$ entonces \mathbf{w}_n converge fuertemente a $\mathbf{u}_{\Omega} \in V(\Omega)$, donde \mathbf{u}_{Ω} es la solución del problema de Stokes:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Demostración.

Nótese que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \, dx &= \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{u}_n \, dx \\
&= \int_{\Omega} f \circ \psi_n \cdot \mathbf{u}_n \circ \psi_n |\det(\nabla \psi_n)| \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{w}_n (f_n |\det(\nabla \psi_n)|) \, dx \quad (4.21)
\end{aligned}$$

1) Del Lema 4.3 se tiene que $f_n = f \circ \psi_n \rightarrow f$ en $L^2(\Omega)$.

2) Por definición $\nabla \psi_n$ converge uniformemente a I . Por lo tanto, $|\det(\nabla \psi_n)| f_n \rightarrow f$ en $L^2(\Omega)$

3) Por el Lema 4.2 sabemos que \mathbf{w}_n converge débilmente a \mathbf{u}_{Ω} .

Por lo tanto, tomando el límite en (4.21)¹¹:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{w}_n f_n |\det(\nabla \psi_n)| \, dx \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{u}_{\Omega} f \, dx \\
&= \|\mathbf{u}_{\Omega}\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Por lo tanto usando el Lema 4.1, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)}} = 1 \quad (4.23)$$

Por lo tanto, de (4.22) y (4.23), se sigue que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\mathbf{u}_{\Omega}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

□

5. Convergencia fuerte: extensión por cero

Considérese a un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ acotado y a una sucesión $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ de dominios acotados y de Lipschitz que converge **difeomórficamente y compactamente** a algún dominio acotado y Lipschitz $\Omega \subset D$. Sea $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de difeomorfismos como en la definición 3.1.

¹¹Usando la siguiente desigualdad $|\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{w}_n\| \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| + |\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}^*, \mathbf{v} \rangle|$

Sea $\mathbf{u}_\Omega \in V(\Omega)$ la solución del problema variacional de Stokes 3.2). Considérese la extensión por cero de \mathbf{u}_Ω a $H_0^1(D)$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_\Omega = \begin{cases} \mathbf{u}_\Omega & x \in \Omega \\ 0 & x \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

Nótese que si $\tilde{\varphi}$ es la extensión por cero de alguna función $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(D)$, y que

$$\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1(D)} \\ \widetilde{\nabla\varphi} = \nabla\tilde{\varphi}$$

Se puede probar por un argumento de densidad que esto es cierto si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 5.1. *Sea $f \in L^2(D)$ dada. Si $\mathbf{u}_n \in V(\Omega_n)$ es la solución del problema variacional de Stokes (3.2) entonces $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge fuertemente $V(\Omega)$ a $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$, donde \mathbf{u}_Ω es la solución del problema variacional de Stokes:*

$$\int_\Omega \mu \nabla \mathbf{u}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega f \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$$

Demostración.

De las demostraciones de la subsección 4.2, y por (4.22), sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} = \|\mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Puesto que $\tilde{\mathbf{u}}_n$ y $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$ son extensiones por cero respectivamente, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{u}}_n\|_{H_0^1(D)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(\Omega_n)} \\ = \|\mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\tilde{\mathbf{u}}_\Omega\|_{H_0^1(D)}$$

Por lo que sólo se tiene que probar que $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge débilmente a $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$.

Sea:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dada $\mathbf{v} \in H_0^1(D)$, obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n \, dx &= \int_{\Omega_n} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_n \, dx \\ &= \int_{\psi_n(\Omega)} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_n \, dx \\ &= \int_\Omega (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_n) \circ \psi_n |det(\nabla \psi_n)| \, dx \\ &= \int_\Omega (\nabla \mathbf{v} \circ \psi_n) \cdot \nabla \mathbf{w}_n |det(\nabla \psi_n)| \, dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

y ya que $\psi_n \rightarrow id$ y $\nabla \psi_n \rightarrow I$ uniformemente, por el Lema 4.3, se sigue que:

$$(\nabla \mathbf{v} \circ \psi_n) |det(\nabla \psi_n)| \rightarrow \nabla \mathbf{v}, \quad \text{en } L^2(\Omega) \quad (5.2)$$

Por lo que tomando el límite en (5.1) y usando la convergencia fuerte de $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{u}_\Omega$ en $H_0^1(\Omega)$ y (5.2) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n \, dx &= \int_\Omega \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\Omega \, dx \\ &= \int_D \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\Omega \, dx \end{aligned}$$

Puesto que esto es cierto para toda $\mathbf{v} \in H_0^1(D)$, se puede afirmar que $\tilde{\mathbf{u}}_n$ converge débilmente a $\tilde{\mathbf{u}}_\Omega$. Y puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n\|_{H_0^1(D)} = \|\mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(D)}$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\Omega\|_{H_0^1(D)} = 0$$

□

5.1. Continuidad débil de la presión

En esta subsección se demuestra que también la presión depende continuamente del dominio de definición del problema de Stokes estacionario bajo estudio.

Lema 5.1. *Sea $\{\Omega_n\}$, $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión de conjuntos que converge difeomórficamente a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con respecto a la familia de difeomorfismos $\{\psi_n\}$. Dada $f \in L^2(D)$, sea (\mathbf{u}_n, p_n) la*

solución (en formulación variacional), del problema de Stokes (3.1) en $H_0^1(\Omega_n) \times L^2(\Omega_n)$, i.e:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(v) \, dx \\ &= \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega_n) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si $q_n = p_n \circ \psi_n$ entonces q_n converge débilmente a $p_\Omega \in L^2(\Omega)$, donde $(\mathbf{u}_\Omega, p_\Omega)$ es la solución del problema de Stokes (5.3) sobre el dominio Ω .

Demostración.

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega)$ un campo vectorial cualquiera dado, como $\Omega_n \rightarrow \Omega$ converge compactamente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega_n)$, si $n > N$. Consecuentemente, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx, \quad n > N \end{aligned} \quad (5.4)$$

Tomando $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_n \circ \psi_n$ y usando el Teorema 5.1 se tiene:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega_n} \mu \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega_n} f \cdot \mathbf{v} \, dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega} p_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

Observando que:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} q_n (\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n) \det(\nabla \psi_n) \, dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \int_{\Omega} q_n (\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n) \, dx \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} q_n (\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n) \, dx \right| \\ & \leq \|q_n\|_{L^2(\Omega)} (\|(\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \|\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{v}) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)}) \\ & \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} (\|(\operatorname{div}(\mathbf{v}) \circ \psi_n - \operatorname{div}(\mathbf{v})) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \|\operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{v}) \det(\nabla \psi_n)\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Usando la convergencia uniforme de los difeomorfismos tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} p_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \quad (5.7)$$

De (5.5) y (5.7) se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} q_n \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} p_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{D}(\Omega) \quad (5.8)$$

Utilizando un argumento de densidad podemos afirmar que:

$$q_n \rightarrow p_\Omega, \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega). \quad (5.9)$$

□

Para concluir esta sección notemos que si tomamos \tilde{p}_n la extensión por cero a D , y $\phi \in D(D)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_D \tilde{p}_n \cdot \phi \, dx &= \int_{\Omega_n} p_n \cdot \phi \, dx \\ &= \int_{\Omega} q_n \cdot (\phi \circ \psi_n) \, dx \end{aligned}$$

Tomando límites y usando el hecho $(\phi \circ \psi_n) \rightarrow \phi$, y que $q_n \rightarrow p_\Omega$, débilmente en $L^2(\Omega)$.

Se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \tilde{p}_n \cdot \phi \, dx = \int_{\Omega} p_\Omega \cdot \phi \, dx = \int_D \tilde{p}_\Omega \cdot \phi \, dx$$

6. Experimentos numéricos

Una vez que se ha probado que el problema directo sobre el flujo estacionario de un fluido viscoso modelado con la ecuación Stokes, es bien planteado; i.e., que su solución depende continuamente con respecto a las condiciones de frontera, fuerzas externas y de su dominio de definición, se ha dado un primer paso en firme para abordar el problema inverso sobre la develación de una obstrucción parcial sobre el ducto de flujo estacionario de un fluido viscoso. En esta sección se presentan algunos de los resultados preliminares obtenidos de nuestros experimentos numéricos para la develación de una obstrucción parcial en el ducto de un flujo viscoso. Cabe mencionar que nuestros experimentos fueron obtenidos usando un servidor con el sistema operativo ubuntu, procesador core i7 920 (2.8GHz) con arquitectura de 62 bits y usando el método de elementos finitos con elementos mixtos (P1 para la presión y P2 para la velocidad [3]), implementado con software el *FreeFem++* para la resolución numérica del problema directo que a continuación se describe.

El problema directo a considerar es la ecuación de Stokes:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \end{cases} \quad (6.1)$$

con las condiciones de frontera de Dirichlet siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (1, 0) & x \in \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \mathbf{u} = (0, 0) & x \in \partial\Omega_{mov(b,c)} \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_m \end{cases}$$

que se ilustran en la Figura 4 siguiente:



Figura 4: Condiciones de frontera

Nuestro objetivo consiste en develar la obstrucción $V(b, c)$ sobre la frontera superior del ducto descrito en la Figura 4 modelada paramétricamente por la función:

$$h(x) = D - \frac{b}{2}(1 - \cos(2\pi(x - c)/D))$$

$$|x - c| \leq D, \quad 0 < b < D$$

donde el parámetro b da la pérdida del claro de luz transversal al ducto y c da la ubicación de la obstrucción, usando para ello sólo mediciones de la presión (Véase la subsección 2.2).

Para tal propósito se tomaron los valores para la presión media con un parámetro $\epsilon = 0.01$, invasión por la obstrucción del claro de luz del ducto y ubicación siguientes:

$$p^* = L_S, \quad b^* = 0.5 \quad y \quad c^* = 5.0 \quad (6.2)$$

Con estos datos se resolvió numéricamente el problema directo de Stokes y se registraron presiones locales promedio en puntos cercanos a la frontera superior. Así, el problema inverso de develar la obstrucción consiste en hallar una estimación de los parámetros b y c .

$$(\hat{b}, \hat{c}) = \underset{(b,c) \in \Theta}{\text{argmin}} J(b, c) \quad (6.3)$$

donde el funcional $J(b, c)$, está dado por:

$$J(b, c) = \sum_{j=1}^N |\bar{p}_{x_j} - \bar{v}_{x_j, \epsilon}(p(\cdot; b, c))| \quad (6.4)$$

donde $(\mathbf{u}(\cdot; b, c), p(\cdot; b, c))$ es solución de las ecuaciones de Stokes (6.1) sobre el dominio $\Omega(b, c)$.

Cabe mencionar que se decidió usar este funcional, ya que el método de optimización que se uso es libre de derivadas; y que además, como es bien sabido, es más robusto en la estimación de parámetros en comparación con el funcional de mínimo de cuadrados [6].

Sin embargo, no fue posible lograr la develación de la obstrucción. Para explicar esto, se pasó a analizar la funcional objetivo $J(b, c)$, resultando que ésta no es convexa (Véase la Figura 5 a continuación).

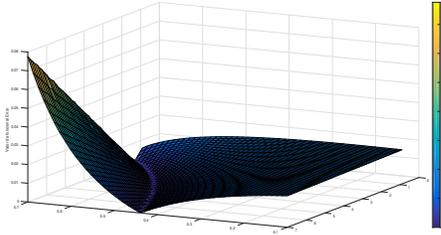


Figura 5: Gráfica de $J(b, c)$

No obstante, nótese que el funcional parece convexo en dirección al eje b que corresponde a la profundidad de la obstrucción (Véase Figura 5). Por ello, se pasó a hallar la solución del siguiente problema:

$$\hat{b} = \operatorname{argmin}_{(b,c) \in \Theta} J(b, c^*) \quad (6.5)$$

Utilizando el método simplex en Matlab se obtuvieron los siguientes resultados. En las segunda y tercera columnas de las tablas 1 y 2, se muestran los resultados sin errores de medición en las presiones promedio observadas resultando, redondeando a 3 cifras decimales, iguales al valor exacto de la profundidad $b_* = 0.5$ y $b_* = 0.75$. Mientras que en las dos últimas columnas se muestran los resultados con un error de medición del 10% en las presiones promedio observadas resultando, redondeando a 2 cifras decimales, iguales al valor exacto de la profundidad.

Es importante decir que el centro de las N mediciones x_j está dado por la siguiente función:

$$x_j = \left(10.0 + 20.0 \frac{j}{N}, 0.8\right) \quad (6.6)$$

Error de medición	Ninguno		$\mathcal{N}(0, 0.1)$	
	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}
N.Sensores				
3	2.0602E-04	5.0021E-01	1.5852E-01	3.4148E-01
4	1.5735E-06	5.0000E-01	1.7365E-01	3.2635E-01
5	2.5806E-04	5.0026E-01	8.5375E-03	5.0854E-01
6	2.1161E-04	5.0021E-01	1.9499E-03	5.0195E-01
7	8.9752E-06	4.9999E-01	3.2242E-02	5.3224E-01
8	1.3954E-05	4.9999E-01	2.1715E-02	5.2171E-01
9	8.5663E-05	5.0009E-01	4.6842E-02	5.4684E-01
10	8.7768E-06	4.9999E-01	1.9481E-02	4.8052E-01

Tabla 1: Tabla de errores, $b_{exact} = 0.5$

Error de medición	Ninguno		$\mathcal{N}(0, 0.1)$	
	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}	$ b_{exacto} - b_{aprox} $	b_{aprox}
N.Sensores				
3	6.9160E-06	7.4999E-01	1.4431E-03	7.5144E-01
4	1.3413E-05	7.4999E-01	4.5747E-04	7.4954E-01
5	5.8467E-06	7.5001E-01	6.8557E-03	7.5686E-01
6	6.9160E-06	7.4999E-01	1.1624E-02	7.6162E-01
7	6.9387E-06	7.4999E-01	1.7595E-06	7.5000E-01
8	8.5166E-06	7.5001E-01	3.6683E-03	7.5367E-01
9	2.7696E-06	7.5000E-01	5.3395E-03	7.5534E-01
10	8.5178E-06	7.5001E-01	1.9540E-03	7.4805E-01

Tabla 2: Tabla de errores, $b_{exact} = 0.75$

En la Figura 7, se muestran los errores absolutos en la develación de la profundidad de la obstrucción con respecto al número de sensores (mediciones de la presión promedio observadas), uniformemente colocados cerca del borde superior del ducto usando la ecuación (6.6) para dos casos ($b_{exacta} = 0.5$ izquierda, $b_{exacta} = 0.75$ derecha). Las gráficas negras son el error de aproximación sin errores en las mediciones y las gráficas rosas cuando se tiene 10% de error en las mediciones.

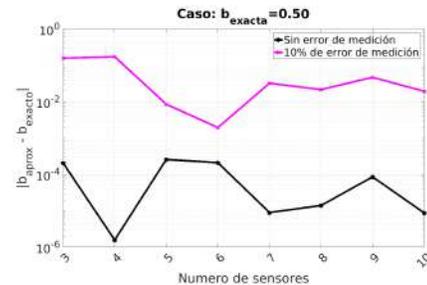


Figura 6: Error de aproximación vs número de sensores, $b_{exacta} = 0.5$

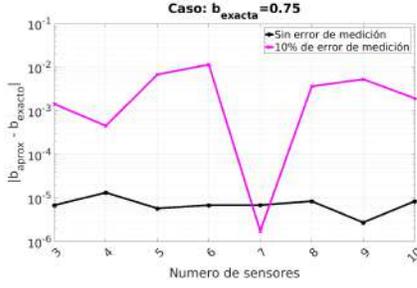


Figura 7: Error de aproximación vs número de sensores, $b_{exacta} = 0.75$

7. Trabajo futuro

En nuestro plan de trabajo a futuro, está contemplado como paso siguiente investigar la *develación* de la obstrucción en el ducto a través del cual fluye un fluido viscoso modelado por las ecuaciones de Navier no-estacionarias, usando mediciones de la presión y alternativamente del campo vectorial. Aunque nuestro primer objetivo central consiste en resolver nuestro problema inverso de flujo sanguíneo usando las ecuaciones de Navier-Stokes no-estacionarias:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & x \in \Omega_{(b,c)} \end{cases} \quad (7.1)$$

y las condiciones de frontera de Dirichlet siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (\sin(\pi y)(\cos((2.0\pi)t + \pi) + 1), 0) \\ \quad (x, y) \in \partial\Omega_{in} \cup \partial\Omega_{out} \\ \mathbf{u} = (0, 0) \\ \quad (x, y) \in \partial\Omega_{mov(b,c)} \cup \partial\Omega_d \cup \partial\Omega_m \end{cases} \quad (7.2)$$

A continuación se muestran unas simulaciones numéricas del flujo de un fluido viscoso a través de un ducto con una obstrucción parcial obtenidas al resolver numéricamente el problema de Navier-Stokes antes descrito.

En las figuras que siguen, se ilustra la simulación numérica en tres instantes de tiempo $t = 0.8, 1.6$ y 2 segundos, de un flujo con turbulencias de un fluido viscoso a través de un ducto con una obstrucción parcial de profundidad del 70 %, resolviendo el problema de Navier-Stokes no-estacionario (7.1)-(7.2), usando un servidor con el sistema operativo ubuntu, procesador core i7 920 (2.8GHz) con arquitectura de 62 bits y usando el método de elementos finitos con elementos mixtos ($P1$ para la presión y $P2$ para la velocidad [3]) combinado con euler implícito, implementado en software *FreeFem++*



Figura 8: Simulación NS, $T = 0.8, b = 0.7$



Figura 9: Simulación NS, $T = 1.6, b = 0.7$



Figura 10: Simulación NS, $T = 2, b = 0.7$

Mientras que en las figuras que siguen, en los mismos instantes de tiempo, es casi imperceptible un flujo turbulento de un fluido viscoso a través de un ducto con una obstrucción de profundidad del 30 %.



Figura 11: Simulación NS, $T = 0.8, b = 0.3$



Figura 12: Simulación NS, $T = 1.6$, $b = 0.3$



Figura 13: Simulación NS, $T = 2$, $b = 0.3$

Cabe mencionar que esto está de acuerdo con la experiencia clínica, pues se espera que nuestra propuesta de detección temprana de estenosis en coronarias resulte efectiva para estenosis con una invasión (profundidad), entre el 50 y el 75 % del claro (sección transversal) del ducto coronario.

En la Figura 14 se representan las mediciones de la presión en el tiempo usando un solo sensor colocado de acuerdo con la ecuación (6.6), para dos profundidades de la obstrucción $b_{0.3}$ (azul), $b_{0.7}$ (roja). Como se puede apreciar la presión no varía considerablemente al cambiar la profundidad de la obstrucción, esto puede ser un indicio que para la develación completa de la obstrucción (profundidad y ubicación) es necesario considerar también mediciones del campo vectorial de velocidades.

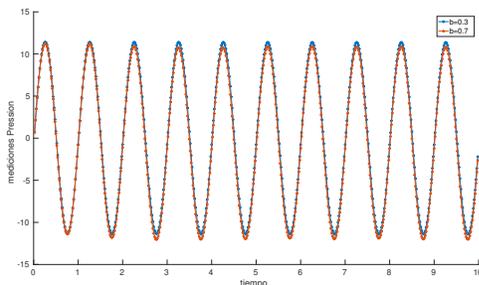


Figura 14: Simulación NS, mediciones de la presión con un sensor. ($b_{0.3}$ roja, $b_{0.7}$ azul)

8. Conclusiones

En este trabajo se reportan resultados preliminares sobre el problema inverso de flujo sanguíneo: *detección temprana de estenosis en coronarias por medios no invasivos*, o la prevención de infartos al miocardio.

En una primera aproximación se ha considerado al flujo sanguíneo modelado mediante las ecuaciones de Stokes en su caso estacionario, demostrando que el problema directo asociado a nuestro problema inverso, es un problema *bien planteado* a la Hadamard con respecto a fuerzas externas, condiciones iniciales y de frontera y en especial con respecto al dominio (frontera) de definición de su solución, pues el problema inverso que nos interesa, en esencia, consiste en develar parte de la geometría de la frontera del dominio de definición de la solución del problema directo.

Nuestras primeras simulaciones numéricas sobre el problema inverso de Stokes estacionario, usando mediciones de la presión promedio en puntos cercanos a la frontera resultaron parcialmente alentadores. Pues, debido a la geometría de la gráfica de la funcional objetivo de mínimo de cuadrados (6.4) que no es convexa y presenta una “barranca” casi plana, sólo fue posible determinar la profundidad de la obstrucción con muy aceptable precisión en presencia de errores de observación del orden del 10 %.

Finalmente, cabe subrayar que los mejores resultados de develación de la profundidad para una obstrucción parcial del 50 % y el 70 % con mediciones de la presión promedio sin ruido y colocados uniformemente cerca de la pared superior del ducto en 2D, se obtuvieron con 4 y 7 sensores, respectivamente. Mientras que para lecturas de las presiones promedio con un ruido de hasta el 10 %, fueron 6 y 7, respectivamente.

Referencias

- [1] V. L. Roger, A. S. Go, D. M. Lloyd-Jones, E. J. Benjamin, J. D. Berry, W. B. Borden, D. M. Bravata, S. Dai, E. S. Ford, C. S. Fox, *et al.*, “Heart disease and stroke statistics—2012 update: a report from the american heart association,” *Circulation*, pp. CIR-0b013e31823ac046, 2011.
- [2] J. H. Seo and R. Mittal, “A coupled flow-acoustic computational study of bruits from a modeled stenosed artery,” *Medical & biological engineering & computing*, vol. 50, no. 10, pp. 1025–1035, 2012.
- [3] R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, vol. 343. American Mathematical Soc., 2001.
- [4] A. Henrot and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, vol. 48. Springer Science & Business Media, 2006.
- [5] G. Allaire, *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modeling and numerical simulation*. Oxford University Press, 2007.
- [6] P. J. Huber, “Robust statistics,” in *International Encyclopedia of Statistical Science*, pp. 1248–1251, Springer, 2011.

Solución numérica de la ecuación vectorial de Saint-Venant utilizando métodos híbridos

Martha Leticia Ruiz Zavala^{1*}, Francisco Javier Domínguez Mota^{1*}

¹Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH

* Correo electrónico: mlruiz@fismat.umich.mx, dmota@umich.mx

Resumen

Las inundaciones y desbordamientos de canales son fenómenos que han venido afectando a la sociedad por muchos años; estos se han incrementado debido a lluvias atípicas provocadas por el cambio climático. Para prevenir las afectaciones es conveniente mejorar nuestra comprensión del fenómeno, el cual está descrito por ecuaciones como las de Saint-Venant. En este trabajo se muestra una alternativa a aproximar numéricamente la solución de tales ecuaciones en dominios como canales.

Palabras clave: Leyes de Conservación; Ecuaciones de Saint-Venant; Métodos Numéricos; Diferencias Finitas Generalizadas; Volúmenes Finitos.

Introducción

Las ecuaciones de Saint-Venant son ecuaciones diferenciales parciales no lineales que se derivan de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales se utilizan para modelar cantidades que se conservan en sistemas cerrados. Hasta el momento no se conoce la solución analítica de las primeras, en casos generales, por lo que se utilizan métodos numéricos para obtener una aproximación a ellas.

Actualmente, en la industria y en la educación, uno de los métodos más utilizados para aproximar derivadas es diferencias finitas debido a su sencillez conceptual; por otro lado, tenemos métodos conservativos como volúmenes finitos, los cuales describen adecuadamente leyes de conservación. Ambos enfoques se complementan al emplearse como partes de un método híbrido.

Por lo anterior, en este trabajo se presentan diferentes esquemas en Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos aplicados en regiones rectangulares.

Descripción del problema

En este trabajo se presentan esquemas para diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos en mallas estructuradas rectangulares, para calcular la solución numérica de la ecuación vectorial de Saint-Venant, la cual modela la dinámica de un cuerpo de aguas bajas, generada por condiciones iniciales dadas.

Modelo matemático

La versión conservativa de las ecuaciones de Saint-Venant está dadas por el sistema

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}_y}{\partial y} + \mathbf{G} = 0, \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_x = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + \frac{q}{2}q_1^2 \\ \frac{q_2q_3}{q_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_y = \begin{pmatrix} q_3 \\ \frac{q_2q_3}{q_1} \\ \frac{q_3^2}{q_1} + \frac{q}{2}q_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -fq_3 + c_f \frac{q_2}{(q_1 - Z_b)^2} \sqrt{q_2^2 + q_3^2} \\ fq_2 + c_f \frac{q_3}{(q_1 - Z_b)^2} \sqrt{q_2^2 + q_3^2} \end{pmatrix},$$

en la cual q_1 representa el *tirante*, q_2 y q_3 son los *gastos* en los ejes x y y respectivamente, f es el parámetro de Coriolis, c_f es una expresión simplificada para los esfuerzos en el fondo y Z_b es la función que describe el fondo del cuerpo de agua; en nuestro caso la tomaremos como constante.

Metodología de solución

Como primera aproximación utilizamos *diferencias finitas generalizadas*, por lo que consideramos el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu$$

el cual aproximaremos en el punto p_0 utilizando aproximaciones a los valores de la función u en algunos vecinos p_1, \dots, p_q .

Podemos escribir el esquema en diferencias finitas como la combinación lineal

$$L_0 = \sum_{i=0}^q \Gamma_i u(p_i)$$

donde Γ_i es constante para cada $p_i = (x_i, y_i) \forall i \in [0, q]$.

El esquema es consistente si

$$Lu|_{p_0} - \sum_{i=0}^q \Gamma_i u(p_i) \rightarrow 0 \quad (2)$$

a medida que $p_1, \dots, p_q \rightarrow p_0$.

Si tomamos la expansión de la ecuación (2) alrededor del punto p_0 , utilizando q puntos, se define de manera natural un sistema de 6 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas

$$M\Gamma = \beta, \quad (3)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} \quad y \quad \beta = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}.$$

Recordemos que para poder aplicar el esquema dado por (2), necesitamos conocer el valor del vector Γ ; para nuestro estencil, tomaremos los siguientes valores para las aproximaciones sobre las parciales de x y y respectivamente

$$\Gamma_x = \frac{1}{6\Delta x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \Gamma_y = \frac{1}{6\Delta y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde Δx y Δy son los tamaños de pasos en el eje x y y , respectivamente; y cuya distribución de pesos Γ_i es como se muestra en la figura 1

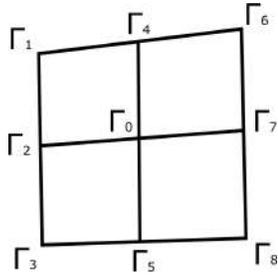


Figura 1: Distribución de pesos en la malla.

Como segunda propuesta de aproximación a la solución se utilizó una variante del método de *volúmenes híbridos*; para esto, tomamos la ecuación (1) en su forma integral

$$\int_{C_{i,j}} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \mathbf{G} \right) dA = 0,$$

donde la celda $C_{i,j}$ está determinada por

$$C_{i,j} = ((x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})).$$

A diferencia del método clásico de volúmenes finitos ([1]) no intentaremos aplicar el Teorema de Green en la ecuación (4), sino que proponemos aplicar diferencias finitas FTCS (centrada en el espacio y hacia adelante en el tiempo) en los centroides de los volúmenes como se muestra en la figura 2, es por eso que consideramos a este método *híbrido*.

Cabe mencionar que, al aplicar diferencias finitas en la ecuación 4, obtenemos un esquema prácticamente idéntico al que obtendríamos al utilizar el método de FTCS (siempre y cuando tomemos mallas regulares), empero, no debemos de olvidar que el primero surge de la forma integral de la ecuación y las evaluaciones se realizan en los centroides de las celdas y no en los nodos.

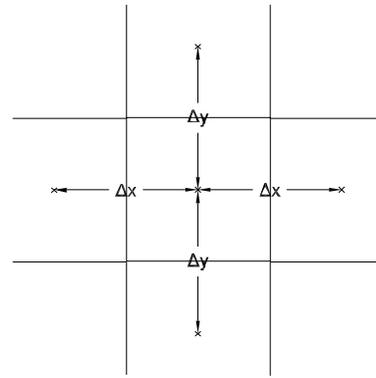


Figura 2: Celda para volúmenes finitos.

Experimentación computacional

Las simulaciones realizadas en este trabajo fueron ejecutadas en una computadora HP Pavilion 23-Q143LA All-in-One bajo el sistema operativo Windows 10 de 64 bits, con un procesador Intel Core i5 a 2GHz y 8GB de memoria RAM. Dichas simulaciones se realizaron en un cuadrado a escala de $1 \times 1m^2$, por el cual pasa un flujo en dirección de oeste a este, y cuya batimetría, z_b , consiste en un perfil de fondo plano a una altura constante $\frac{49}{100}$, para cumplir con las condiciones de escala. Para la discretización espacial tomamos una malla regular de 41 puntos por lado, como se muestra en la figura 3; en cuanto al dominio temporal, se tomó el intervalo $[0, 1]s$ con 10^5 subintervalos equiespaciados, esto para satisfacer condiciones de estabilidad.

Las fuerzas volumétricas y la fricción en el fondo se tomaron como constantes a los valores

$$g = 9.81m/s^2, \quad f = 2\theta \sin(\phi), \quad c_f = 0.005,$$

donde θ es la velocidad angular de la tierra y el ángulo de latitud geográfico es $\phi = 19.6104$, que corresponde a la latitud de la ciudad de Morelia, Michoacán. Lo cual puede describir algún canal cuyo fondo es de un mismo material.

Como condición inicial para el tirante q_1 tomamos la función, propuesta por ([2]),

$$q_1(x, y, 0) = 0.5 + 0.002e^{\frac{-(x-0.5)^2 - (y-0.5)^2}{.001}},$$

la cual representa un *solitón* como el que se muestra en la figura 5; mientras que como *condición de frontera* tomaremos la profundidad de un canal promedio de 0.5 metros.

Por otra parte tomamos condiciones de no deslizamiento en los márgenes del canal, por consiguiente los gastos q_2 y q_3 resultan nulos en dichos márgenes para todo tiempo. En cuanto a las fronteras de entrada y salida del flujo, tomaremos un perfil parabólico para representar la distribución de velocidades $v(x, y)$, cuya velocidad máxima es de $0.2m/s$, como se muestra en la figura 4, lo que indica que el gasto generado por las velocidades sobre el eje y , q_3 , es nulo para todo tiempo; mientras q_2 , en las fronteras, está dado por

$$\int v dA = \int_{y_i}^{y_{i+1}} v(x, y) dy,$$

para todo tiempo.

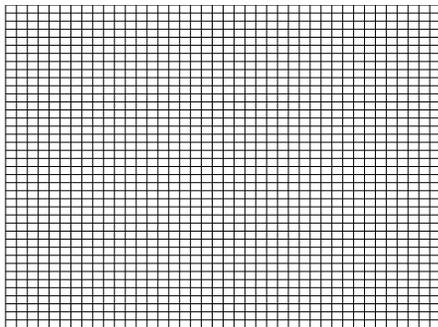


Figura 3: Malla usada.

Al aplicar el estencil para diferencias finitas propuesto con anterioridad, obtenemos el comportamiento de q_1 como el que se muestra en la figura 6.

El comportamiento del gasto en los ejes x y y se pueden apreciar en las figuras 7 y 8, respectivamente.

Ahora bien, si aplicamos el método de volúmenes híbridos con la misma condición inicial obtenemos el comportamiento del tirante q_1 y

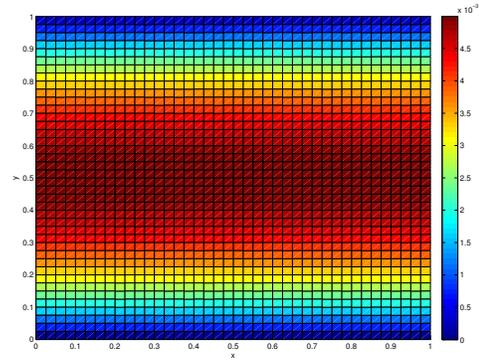


Figura 4: Condición inicial para q_2 vista desde planta.

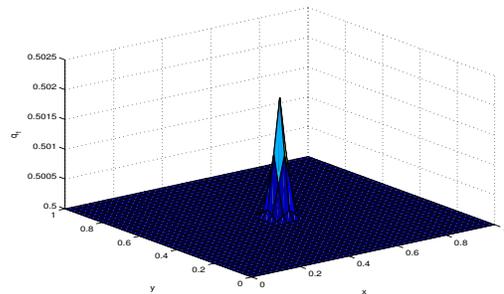


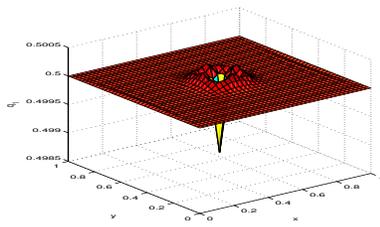
Figura 5: Solitón como condición inicial para q_1

de los gastos q_2 y q_3 como se muestran en las figuras 9, 10 y 11 respectivamente.

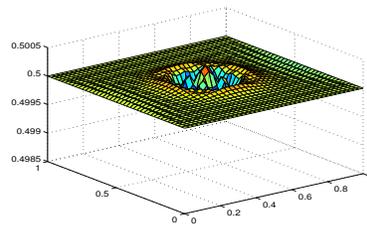
Conclusiones

Al aplicar los métodos propuestos, obtuvimos aproximaciones consistentes con la mecánica real del fenómeno, para cierto intervalo de tiempo y para la resolución con la que se resolvió, el cual es uno de nuestros principales puntos de referencia al no tener una solución analítica.

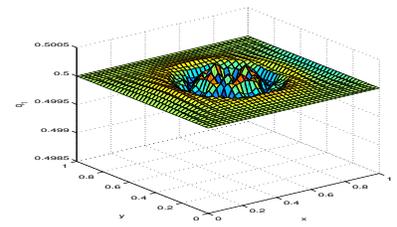
Se logró implementar un esquema que combinara la parte conservativa de las ecuaciones con una implementación sencilla y barata, computacionalmente hablando, al juntar los métodos de volúmenes y diferencias. Particularmente, al aplicar el método de volúmenes híbridos, se pueden apreciar transiciones más suaves de las aproximaciones de las variables conservativas.



(a) $t = 0.05s$

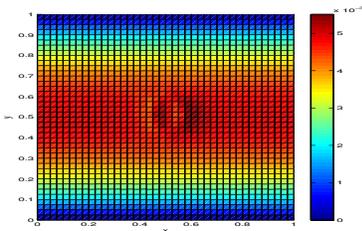


(b) $t = 0.10s$

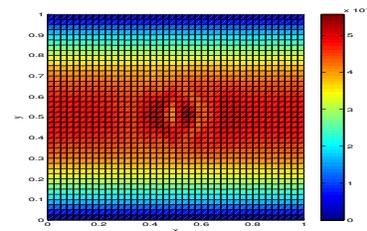


(c) $t = 0.15s$

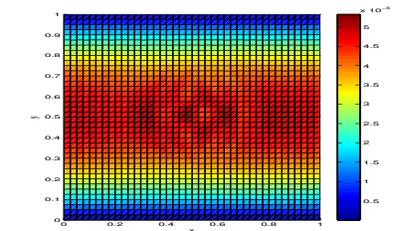
Figura 6: Aproximación del tirante q_1 mediante diferencias finitas con el estencil propuesto.



(a) $t = 0.05s$

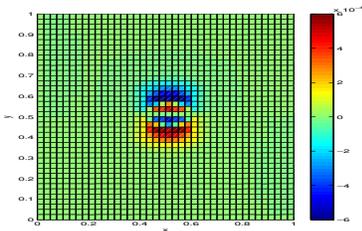


(b) $t = 0.10s$

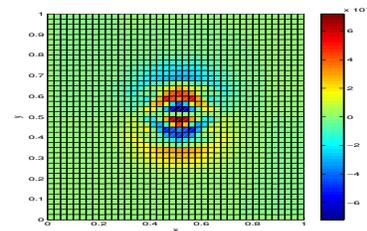


(c) $t = 0.15s$

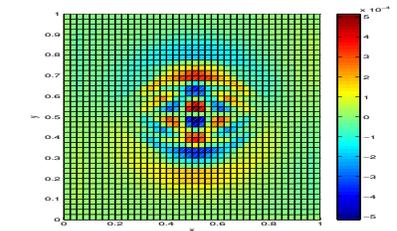
Figura 7: Aproximación del gasto q_2 mediante diferencias finitas con diferentes esquemas.



(a) $t = 0.05s$

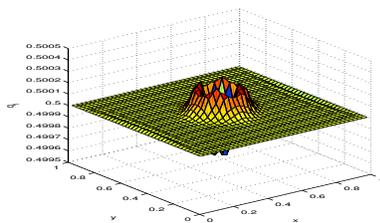


(b) $t = 0.10s$

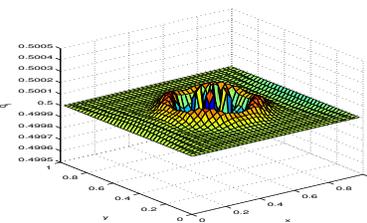


(c) $t = 0.15s$

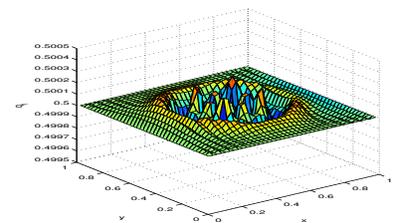
Figura 8: Aproximación del gasto q_3 mediante diferencias finitas con diferentes esquemas.



(a) $t = 0.05s$



(b) $t = 0.10s$



(c) $t = 0.15s$

Figura 9: Aproximación del tirante q_1 mediante volúmenes híbridos.

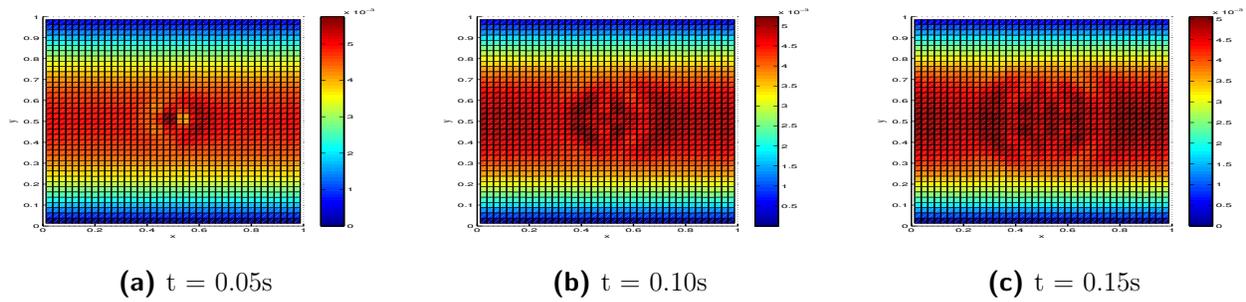


Figura 10: Aproximación del gasto q_2 mediante volúmenes híbridos.

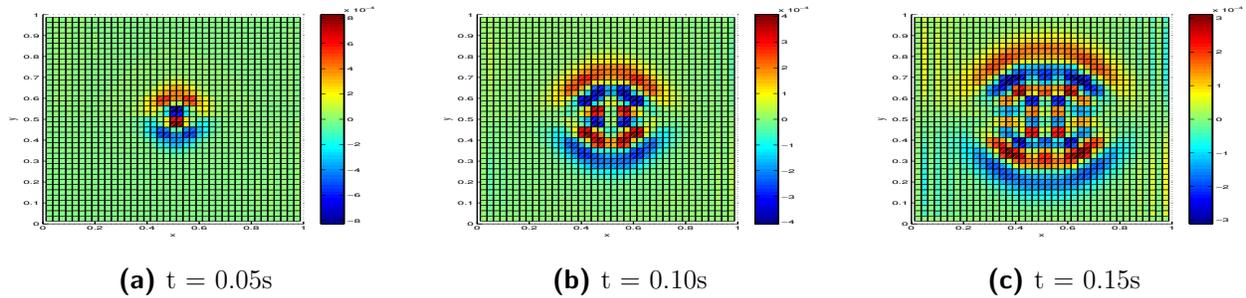


Figura 11: Aproximación del gasto q_3 mediante volúmenes híbridos.

Para obtener mejores resultados, es necesario realizar análisis sobre la conservación de las magnitudes aproximadas, optimizar la implementación, realizarla con mayor resolución y adaptar los esquemas a regiones no regulares con batimetrías cuyas pendientes sean suaves.

Referencias

- [1] Randall J. LeVeque. *Finite-Volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press, 1 edition, 2002.
- [2] Charles L. Mader. *Numerical modeling of water waves*. CRC Press, 2 edition, 2000.

Próximos eventos

VIII Encuentro Cuba- México Métodos Numéricos y Optimización

del 18 al 22 de marzo de 2019, La Habana, Cuba



Segundo Anuncio

Teniendo en cuenta el éxito de los cinco encuentros celebrados en La Habana desde el año 2012, el Comité Organizador de EMNO 2019 ha decidido extender una cordial invitación a todos los científicos interesados en colaborar con instituciones cubanas y mexicanas en las disciplinas de Análisis Numérico y Optimización, con independencia de su país de procedencia.

El Encuentro está dirigido a investigadores, profesores y estudiantes interesados en los temas más actuales de investigación en las áreas ya mencionadas.

Se realizarán dos tipos de actividades: cursos introductorios y presentación de ponencias. Se dará prioridad a las ponencias que presenten el estado del arte en algún tema de investigación de las siguientes temáticas:

- Optimización
- Álgebra Lineal Numérica
- Interpolación y Aproximación
- Software para Cómputo Científico
- Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales
- Geometría Computacional

Los interesados en participar con una ponencia o impartir un curso deben elaborar un resumen de una página que contenga el nombre de los autores, instituciones, título de la ponencia o curso y palabras claves.

Las memorias del evento serán publicadas en un número especial de la Revista Ciencias Matemáticas. El Comité Científico seleccionará los trabajos a publicar entre los presentados en el evento.

Fechas importantes

- Entrega de resúmenes: hasta el 5 enero, 2019.
- Aceptación de los trabajos: 14 enero, 2019.

Cuota de inscripción:

Extranjeros: 80.00 cuc
Cubanos: 80.00 cup

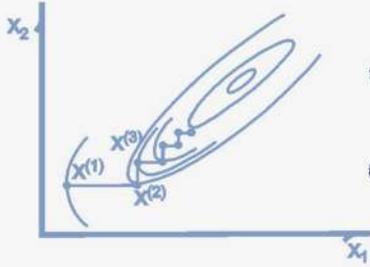
Más información en

<http://tikhonov.fciencias.unam.mx/emno2019/>

Comité Organizador

- Pablo Barrera Sánchez, UNAM, México
- Guilmer González Flores, UNAM, México.
- Francisco Domínguez Mota, UMICH, México.
- Victoria Hernández Mederos, ICIMAF, Cuba.
- Marta Lourdes Baguer, UH, Cuba.





XXVIII

ENOAN

Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones, A.C. y la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, informan que, del 26 al 30 de agosto de 2019, se llevará a cabo en las instalaciones del Consejo Zacatecano de Ciencia, Tecnología e Innovación, la XXVIII Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico. En este evento se llevarán a cabo

Cursos, Conferencias y Presentación de Trabajos relacionados con el Cómputo científico, Análisis Numérico, Optimización, Modelación y Simulación, Algoritmos y Aplicaciones

El tema principal del Taller propuesto por la sede será Big Data y Machine Learning.

Informes

www.smcca.org.mx/enoan2019

informes@smcca.org.mx



CONSEJO ZACATECANO DE
**CIENCIA, TECNOLOGÍA
E INNOVACIÓN**

¿QUIERES PUBLICAR "ARTÍCULOS", "INFORMACIÓN SOBRE EVENTOS" O "NOTICIAS" EN EL BOLETÍN?

La **Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones**, A. C. (SMCCA), convoca a toda la comunidad interesada en el área de la Computación Científica y sus Aplicaciones, a presentar noticias, información sobre eventos, artículos de divulgación e investigación de alta calidad en el área, así como reportes de trabajos de tesis de nivel licenciatura y posgrado en Matemáticas Aplicadas.

Requisitos para las colaboraciones en el Boletín

I.- Artículos de Divulgación e Investigación

- a) Los artículos que se envíen para ser publicados deberán ser inéditos y no haber sido ni ser sometidos simultáneamente a la consideración en otras publicaciones.
- b) Los artículos **deben** presentarse en el formato de la plantilla LaTeX disponible en www.smcca.org.mx
- c) No deberán exceder de ocho páginas, tamaño carta incluyendo texto, tablas y gráficos.

II.- Información sobre eventos

- a) Los eventos cuya información quiera ser publicada para promocionarlos, deberán estar relacionados con el área de las Matemáticas Aplicadas y la Computación Científica.
- b) La información debe enviarse en un archivo de imagen: PDF, JPG, PNG.
- c) La información no deberá exceder a una cuartilla.
- d) Enviar la información con al menos 6 meses de anticipación a la fecha en que se llevaría a cabo.

III.- Noticias

- a) Las noticias a ser publicadas en el Boletín deben ser noticias relevantes de actividades de la SMCCA, Socios, Comunidad Científica interesada en las Matemáticas y Computación Aplicada
- b) La información de las noticias debe enviarse en un archivo de imagen: PDF, JPG, PNG.
- c) La información no deberá exceder a una cuartilla.

El material de colaboración: noticias, información eventos, artículos deberán ser dirigidos a la Dra. Irma Delia García Calvillo al correo electrónico de la SMCCA smcca@smcca.org.mx

Todos los artículos son sometidos a evaluación por especialistas de instituciones nacionales e internacionales y su publicación estará sujeta a la disponibilidad de espacio en cada número. Las demás colaboraciones se someterán a corrección de estilo y su publicación estará sujeta a la disponibilidad de espacio en cada número. Sólo se aceptará el material enviado que satisfaga todos los requisitos aquí señalados.

El envío de cualquier colaboración al Boletín implica no sólo la aceptación de lo establecido en este documento, sino también la autorización al Comité Editorial del Boletín de la SMCCA para incluirlo en su página electrónica, reimpresiones, colecciones y en cualquier otro medio que permita lograr una mayor y mejor difusión.

Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones

Consejo Directivo de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones 2018-2020

Dr. Justino Alavez Ramírez.	Presidente
Dra. Rina Betzabeth Ojeda Castañeda.	Vicepresidente
Dr. Pedro Flores Pérez.	Secretaria
Dr. Jorge López López.	Tesorero
Dra. Ma. Luisa Sandoval Solís.	Secretaria de actas y acuerdos
Dr. Miguel Uh Zapata	Vocal
Lic. Gerardo Tinoco Ruíz.	Vocal

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones fue fundada el 16 de Mayo de 2013, para realizar actividades de investigación científica o tecnológica inscritas en el RENIECyT (Registro Nacional de Instituciones y Empresas Científicas y Tecnológicas), prestadas únicamente a los socios y asociados. Es una Asociación sin fines de lucro. Entre sus tareas fundamentales destacan: Conjuntar acciones e intereses comunes en los investigadores, profesores y estudiantes interesados en la Computación Científica y sus Aplicaciones, con el fin de fomentar la investigación de calidad, promover la actualización y el perfeccionamiento para el desarrollo científico, tecnológico y social; promover la creación, organización, acumulación y difusión de conocimientos referidos a la Computación Científica y sus Aplicaciones; promover la formación e interacción de redes y grupos de trabajo orientados hacia el desarrollo disciplinar, interdisciplinar y temático de la investigación; fomentar el desarrollo de la investigación sobre la Computación Científica y sus Aplicaciones en la República Mexicana; contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la Computación Científica y sus Aplicaciones en la República Mexicana; promover y organizar toda clase de encuentros y eventos académicos orientados a la comunicación y discusión entre investigadores y profesores, así como también a la difusión del conocimiento hacia sectores interesados en la integración de la Computación Científica y sus Aplicaciones en los problemas de su sector.

Correo electrónico: smcca@smcca.org.mx
<http://www.smcca.org.mx>

