

S  
M  
C  
C  
A



# BOLETÍN

Sociedad Mexicana de Computación  
Científica y sus Aplicaciones

Año II - Número 2

Diciembre 2016



# BOLETÍN

Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones

---

## Consejo Editorial

Pablo Barrera Sánchez, UNAM

Pedro Flores Pérez, UNISON

Irma Delia García Calvillo, UAdeC (*editor responsable*)

Humberto Madrid de la Vega, UAdeC

José Gerardo Tinoco Ruíz, UMSNH

## Editores técnicos

Vanesa Ávalos Gaytan, UAdeC

Oliver Ávalos Rosales, UAdeC

Yajaira Cardona Valdés, UAdeC

Víctor Aram Domínguez Ramírez, UAdeC

El Boletín de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A. C. (SMCCA), Año II, No. 2, Diciembre 2016, es una publicación anual editada por la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A. C., calle Luis Horacio Salinas, 545, Col. Valle de Morelos, Saltillo, Coahuila, C.P. 25013, Tel. (844) 4101242, [www.smmca.org.mx](http://www.smmca.org.mx). Editor responsable: Irma Delia García Calvillo. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-103114330600-203, ISSN *en trámite*, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Yajaira Cardona Valdés, calle Magisterio, s/n, Unidad Camporredondo, Edificio S, Saltillo, Coahuila, C.P. 25280, fecha de última modificación, 15 de diciembre de 2016.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A. C.

Suscripciones al Boletín vía correo electrónico: [smcca@smcca.org.mx](mailto:smcca@smcca.org.mx)

# Contenido

CARTA DE BIENVENIDA.....	4
Reseña del II Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas.....	5
Ganadores del décimoquinto Premio MIXBAAL a la mejor tesis de licenciatura.....	8
Convocatoria a participar en el décimosexto Premio MIXBAAL a la mejor tesis de licenciatura.....	9
<b>ARTÍCULOS</b>	
Reconocimiento de patrones en imágenes digitales a color usando el descriptor RFM.....	11
Modelo de clasificación acorde a parámetros de atención primaria de adultos mayores en el municipio de Saltillo, Coahuila.....	18
Esquema local de acondicionamiento para resolver la ecuación de Poisson mediante funciones de base radial.....	26
Lector agrícola.....	35
Modelado de islas de calor urbanas usando diferencias finitas generalizadas en mallas estructuradas.....	39
Modelación no-ortogonal mediante los modelos Legendre-Fourier y Taylor-Fourier.....	43
Un sistema para la reconstrucción de superficies mediante técnicas de interpolación de datos dispersos.....	48
PRÓXIMOS EVENTOS.....	52
¿Quieres publicar artículos, información sobre eventos o noticias en el Boletín?.....	53

# Carta de Bienvenida

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones, A.C. (SMCCA) y el comité Editorial, les dan una cordial bienvenida a la segunda edición del Boletín electrónico anual de la SMCCA, el cual tiene como objetivo mantenerlos informados de las actividades realizadas por la SMCCA y sus asociados. En el Boletín se publicarán noticias, eventos, artículos de divulgación y de investigación de alto nivel en el área de Cómputo Científico y sus Aplicaciones, así como resúmenes de las mejores tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

En esta segunda edición del boletín se presenta: una breve semblanza del II Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas, llevada a cabo este año del 7 al 9 de septiembre en las instalaciones de la Universidad Autónoma de Coahuila, campus Arteaga, en la Ciudad de Saltillo, Coahuila; en esta edición se presentan siete artículos de investigación, cinco de los cuales fueron trabajo presentados en el II Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas. Por último presentamos los resultados de los ganadores a la décimoquinta edición del premio Mixbaal para la mejor tesis de Licenciatura y se presenta la convocatoria para participar en dicho premio en su décimosexta edición.

La SMCCA agradecerá que ante el interés que surja en los lectores en los temas que se presenten en nuestra publicación, éstos se conviertan en usuarios asiduos, así como en miembros activos de nuestra Sociedad. La información del registro de membresías a la SMCCA la pueden consultar en el Módulo de Registro de nuestra página [www.smcca.org.mx](http://www.smcca.org.mx).

***Rina Betzabeth Ojeda Castañeda***

*Presidenta*

Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones

# Reseña del II Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas



Por Rina Betzabeth Ojeda Castañeda

Del 7 al 9 de septiembre de 2016 se llevó a cabo con gran éxito el Segundo Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas (SENMA 2016), en las instalaciones de la Infoteca de la Universidad Autónoma de Coahuila, en el Campus Arteaga, de la Ciudad de Arteaga, Coah. La organización de este Segundo Encuentro estuvo a cargo de un Comité Local formado por profesores-investigadores del Cuerpo Académico “Computación Científica y sus Aplicaciones”, y de profesores-investigadores y alumnos de la Facultad de Sistemas de la Universidad Autónoma de Coahuila, así como del Comité Nacional conformado por profesores-investigadores miembros en activo de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones. Durante los tres días que duró el evento se tuvo una asistencia total de 150 personas,

entre alumnos de licenciatura y posgrado, profesores, investigadores y profesionales nacionales e investigadores internacionales interesados en la aplicación de las Matemáticas y el Cómputo Científico. Todos los asistentes tuvieron la oportunidad de participar en diversas actividades académicas: 4 conferencias plenarios, 2 cursos cortos, 2 conferencias invitadas y 37 conferencias por solicitud (28 presenciales y 9 en formato de cartel), en cuyas exposiciones se divulgaron y discutieron temas actuales y del estado del arte de la aplicación de las matemáticas en la solución de problemas que surgen en las áreas de la Ciencia y la Ingeniería. Así mismo durante la ceremonia de inauguración se llevó a cabo la premiación del concurso de la mejor tesis de matemáticas aplicadas de licenciatura, MIXBAAL 2016.

Los conferencistas (plenarios e invitados) y los instructores de los cursos que participaron en el evento, son profesores-investigadores de diferentes Instituciones de Educación Superior y Centros de Investigación tanto extranjeros como nacionales. Son profesionales ampliamente reconocidos en sus áreas de conocimiento, con gran experiencia en el ámbito de la docencia e investigación en temas de actualidad, relevantes y en el estado del arte sobre la aplicación de las matemáticas y del cómputo científico en la Ciencia e Ingenierías. Actualmente participan en proyectos establecidos para la solución de problemas ya sea de interés nacional y/o internacional.

Este perfil idóneo de los profesores-investigadores permitió al SENMA 2016 ofrecer a alumnos de licenciatura y posgrado de distintas instituciones educativas del país y del extranjero cursos especializados, a los que generalmente ellos no pueden acceder con regularidad en sus instituciones. Los interesados en conocer información relacionada con los dos cursos impartidos, pueden consultar la página del SENMA en la liga [www.turing.cima.uadec.mx/senmaz/](http://www.turing.cima.uadec.mx/senmaz/).



La participación de conferencistas plenarios e invitados internacionales y nacionales del evento, permitió a todos los asistentes tener la oportunidad de conocer el estado del arte de las Matemáticas Aplicadas tanto en México, como en otros Países. Aquí se hace mención de sus nombres y el lector puede consultar el programa completo de conferencias impartidas en [www.turing.cima.uadec.mx/senmaz/](http://www.turing.cima.uadec.mx/senmaz/).

**Conferencistas Plenarios** Doctores: JOAQUÍN PACHECO B., de la Universidad de Burgos, España, EDGAR OMAR RESÉNDIZ FLORES, del Instituto Tecnológico de Saltillo, ADA MARGARITA ÁLVAREZ SOCARRÁS, de la Universidad Autónoma de Nuevo León y JESÚS LÓPEZ ESTRADA, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

**Conferencistas Invitados** Doctores: GILBERTO CALVILLO VIVES del Instituto de Matemáticas-Cuernavaca-UNAM, y PEDRO FLORES PÉREZ de la Universidad de Sonora.

Dentro de este marco de vinculación de academia-investigación-industria, los alumnos asistentes también tuvieron la oportunidad, de exponer de manera presencial o a través de un formato de cartel, del desarrollo y los resultados de investigaciones que llevan a cabo en conjunto con sus profesores, bien como trabajos de tesis (licenciatura, maestría, doctorado) o en proyectos de investigación establecidos en sus Instituciones, recibiendo una retroalimentación de utilidad para mejorar su trabajo, tanto de parte de investigadores especializados en los temas presentados, como de sus compañeros de otras instituciones, interesados en estos temas.

Por último cabe señalar que el gran esfuerzo de trabajo realizado tanto por el Comité Local (Sede UAdeC) como el Comité Nacional (aglutinados dentro de la SMCCA) en la organización, y contando con el importante apoyo financiero de la Asociación Mexicana para la Innovación en Tecnología, A.C. (AMITE), y de la Facultad de Sistemas de la UAdeC, permitió obtener un conjunto de resultados a beneficio de una comunidad científica conformada por alumnos, profesores, investigadores y profesionales interesados en las Matemáticas Aplicadas, que incidieron en indicadores de impacto como los que se presentan en la siguiente tabla:

Indicador	Cantidad
Total de asistentes	150
Alumnos beneficiados del evento	110
Becas estudiantes de Instituciones de Provincia:	33
Programas Educativos de Instituciones participantes	26
Investigadores, Docentes y Profesionales beneficiados del evento	40
Cuerpos Académicos y Grupos de Investigación del País y del Extranjero	9
Número de Instituciones participantes	
Nacionales	17
Extranjeras	1
	18

# Ganadores del Premio MIXBAAL

Ganadores de la décimoquinta edición del premio Mixbaal a la Mejor Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.



## Ganadora del premio Mixbaal

**SAYDETH LILI LEDESMA MOLINERO**

Lic. en Matemáticas Aplicadas

Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro

**Trabajo:** Estudio sobre los operadores de transmutación y sus aplicaciones

**Asesor:** Dr. Vladislav Kravchenko Cherkasski

## Mención Honorífica

**JONATHAN VERDUGO OLACHEA**

Lic. en Matemáticas Aplicadas

Facultad de Ciencias de la Universidad de Autónoma de Baja California

**Trabajo:** Reconocimiento de patrones en imágenes digitales usando la transformada de Radon

**Asesor:** Dra. Selene Solorza Calderón



## Mención Honorífica

**GABRIEL ADRIÁN SALCEDO VARELA**

Lic. en Matemáticas

Programa de Licenciatura en Matemáticas, División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Sonora

**Trabajo:** Número reproductivo básico para sistemas epidemiológicos: una aplicación al estudio de la rickettsiosis

**Asesor:** Dr. David Baca Carrasco





# CONVOCATORIA AL PREMIO



## A LA MEJOR TESIS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A.C. (SMCCA) y la sección mexicana de SIAM (MEXSIAM) convocan a los profesionistas en matemáticas y ramas afines, recién titulados, a presentar su tesis o su trabajo terminal de licenciatura para el **DÉCIMOSEXTO PREMIO MIXBAAL A LA MEJOR TESIS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS** de acuerdo a las siguientes:

### BASES

1. El trabajo, **sobre un tema de matemáticas aplicadas**, deberá haber sido presentado en alguna institución mexicana de educación superior para obtener el grado de Licenciatura.
2. La fecha de obtención del grado deberá estar comprendida en el lapso del 1 de febrero de 2016 al 31 de enero de 2017.
3. Se deberá enviar, por cuadruplicado:
  - a) Copia del trabajo mecanografiado o tipografiado.
  - b) Documento probatorio con fecha de obtención del título.
  - c) Documento en el que conste oficialmente que el trabajo enviado a concurso fue presentado como requerimiento para la obtención del título.
  - d) Breve currículum del candidato.
  - e) Nombre del asesor o director del trabajo.
  - f) Nombres de los sinodales del examen profesional.

La fecha límite para recibir toda la documentación es el 15 de marzo del 2017.

4. El jurado será designado por la Comisión del PREMIO MIXBAAL y estará integrado por especialistas de reconocido prestigio en diversas ramas de las ciencias relacionadas con las matemáticas aplicadas.

5. El PREMIO MIXBAAL incluye un reconocimiento y un diploma.

6. Se otorgarán menciones honoríficas a juicio del jurado.

7. La decisión del jurado será inapelable.

Los resultados serán comunicados verbalmente a los interesados el 15 de mayo de 2017 y publicados posteriormente en la página de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones: [www.smcca.org.mx/smcca](http://www.smcca.org.mx/smcca)

La entrega del PREMIO MIXBAAL será durante la ceremonia de inauguración de la XXVI Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico.

Cualquier situación no prevista en esta convocatoria, será resuelta por la Comisión del PREMIO MIXBAAL.

La documentación deberá enviarse impresa por correo postal a:

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas, Cubículos 226 ó 028  
Dr. Pablo Barrera Sánchez  
Circuito Exterior s/n  
Colonia Copilco Universidad  
04510 México, D.F.

Informes:

Tels: 5556224836, 5556224928

Correos: [pablobarrera@ciencias.unam.mx](mailto:pablobarrera@ciencias.unam.mx), [guilmerg@yahoo.com](mailto:guilmerg@yahoo.com)

# Reconocimiento de Patrones en Imágenes Digitales a Color usando el Descriptor RFM

Verdugo-Olachea J.,<sup>1\*</sup> Solorza-Calderón S.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Matemáticas Aplicadas, UABC.

\* Correo electrónico: jonathan.verdugo@uabc.edu.mx

## Resumen

En este trabajo se propone un sistema digital de reconocimiento de patrones para imágenes a color basado en firmas 1D invariantes a traslación, escala y rotación (RST). La invariancia a rotación se obtiene por medio de la transformada de Radon. Para la invariancia a escala se utiliza la transformada de Fourier-Mellin normalizada. La invariancia a traslación se consigue a través del espectro de amplitud de la transformada de Fourier de la imagen. Al trabajar en el espacio de color RGB la imagen se separa en tres imágenes monocromáticas, las cuales corresponden al canal rojo (R), verde (G) y azul (B). Al aplicar las transformadas integrales a cada una de las imágenes monocromáticas se generan tres imágenes, denominadas Radon-Fourier-Mellin (RFM) que son invariantes a traslación, escala y rotación, por lo que para una imagen a color se generan tres imágenes Radon-Fourier-Mellin. Para cada una de las imágenes Radon-Fourier-Mellin (señal 2D) se construye una firma 1D invariante a traslación, escala y rotación, de la cual se calcula su potencia. Como para la imagen se tienen tres firmas 1D (una para cada canal), entonces se tienen tres potencias. Las tres potencias son los atributos que se le asignan a la imagen a color para su clasificación y se utilizan para generar un espacio de clasificación 3D que tiene un nivel de confianza de al menos el 95.4%. Para mostrar la eficiencia del sistema se emplea una base de datos de 18 imágenes de referencia a color que contienen mariposas, dicho conjunto fue seleccionado por la similitud que presentan en su morfología y gama de colores.

*Palabras clave:* Reconocimiento de Patrones; Transformadas Integrales; Sistema RFM.

## 1 Introducción

Por medio de la ciencia y la tecnología, se ha tratado de imitar el proceso cognitivo que realiza el cerebro en la toma de decisiones. Un ejemplo de ello, es el campo denominado reconocimiento de patrones, que es un área del procesamiento de imágenes digitales en donde se desarrollan técnicas para: detección, segmentación, localización y reconocimiento de objetos en imágenes digitales; identificación de un objeto en diversas escenas; seguimiento de un objeto en un vídeo (secuencia de imágenes) y clasificación de imágenes digitales por su contenido [10]. Una de las metas en este campo es reconocer objetos de forma automática con un alto nivel de confianza y bajo

costo computacional; no importa si se hace rotar, escalar o desplazar, con diferentes tipos de ruido, iluminación o incluso si sólo se cuenta con un fragmento del objeto [25].

Los sistemas digitales de reconocimiento de patrones basados en funciones de correlación han sido estudio de interés por muchos años [4, 5, 23, 25, 26], estos suponen que las imágenes son invariantes bajo un conjunto de transformaciones (traslación, escala y rotación), por lo que son una herramienta muy útil en la identificación de objetos, ya que lo reconocerán independientemente de la posición, orientación y tamaño en el que se presente [23]. Dichas técnicas son muy efectivas, sin embargo, por lo regular son muy costosas

operacionalmente en tiempo de cómputo.

Con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo, en este trabajo se propone un único espacio de clasificación, en lugar de tener múltiples planos de salida como se hace en los sistemas de reconocimiento de patrones que utilizan funciones de correlación [23, 25] o métricas [4, 5, 19, 28]. El documento se organiza como sigue: en la Sección 2 se explica cómo se crea el descriptor RFM. En la Sección 3 se construyen los espacios de clasificación de al menos el 95.4% de nivel de confianza. La Sección 4 muestra los resultados. Por último, en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

## 2 Sistema de Reconocimiento de Patrones RFM Invariante a Traslación, Escala y Rotación

En la Fig. 1a, 1b y 1c se muestran tres imágenes en blanco y negro con cuadrados que presentan diferente factor de traslación, escala y rotación. A estas imágenes se les llamó  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ .  $K_1$  contiene el cuadrado que está trasladado con respecto al centro de la imagen, escalado un 10% con respecto a  $K_2$  y sin rotación.  $K_2$  no presenta traslación ni escalamiento y está rotado  $22^\circ$ .  $K_3$  es la imagen que contiene el cuadrado que está trasladado con respecto al centro de la imagen, escalado  $-10\%$  con respecto a la imagen  $K_2$  y rotado  $45^\circ$ .

En el sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales a color Radon-Fourier-Mellin (RFM), el primer paso es obtener la invarianza a traslación. Para esto se utiliza el módulo de la transformada de Fourier [26], esto es

$$A_i = \left| \mathcal{F}\{K_i\} \right|, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Solamente por cuestiones de visualización, en la Fig. 1b, 1d y 1f se muestra el módulo de la transformada de Fourier en escala logarítmica de las imágenes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , respectivamente. Se observa que  $A_{K_1}$ ,  $A_{K_2}$  y  $A_{K_3}$  presentan una deformación debido a las diferentes escalas de las

imágenes de los cuadrados. También se observa que  $A_{K_2}$  y  $A_{K_3}$  presentan una rotación con el mismo ángulo que  $K_2$  y  $K_3$ .

El siguiente paso en el sistema RFM es incorporar la invarianza a escala. Esto se hará por medio de la transformada analítica de Fourier-Mellin (TAFM) que se calculará vía la transformada de Fourier [4, 19, 27], mediante

$$M(k, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} A(e^\rho, \theta) e^{\rho\sigma} e^{-i(k\theta + c\rho)} d\theta d\rho, \quad (2)$$

donde  $A$  es la imagen obtenida en la ecuación 1,  $\rho = \ln(r)$  y  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ .

Sin embargo, la ecuación 2 no es invariante a escala, propiedad que sí posee la transformada de Fourier-Mellin. Para recuperar la invarianza a escala, se normaliza el módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin por su valor en el centro de coordenadas [4, 24, 27], es decir

$$S_M(k, c) = \left| \frac{M(k, c)}{M(c_x, c_y)} \right|, \quad (3)$$

donde  $(c_x, c_y)$  es el píxel central de la imagen.

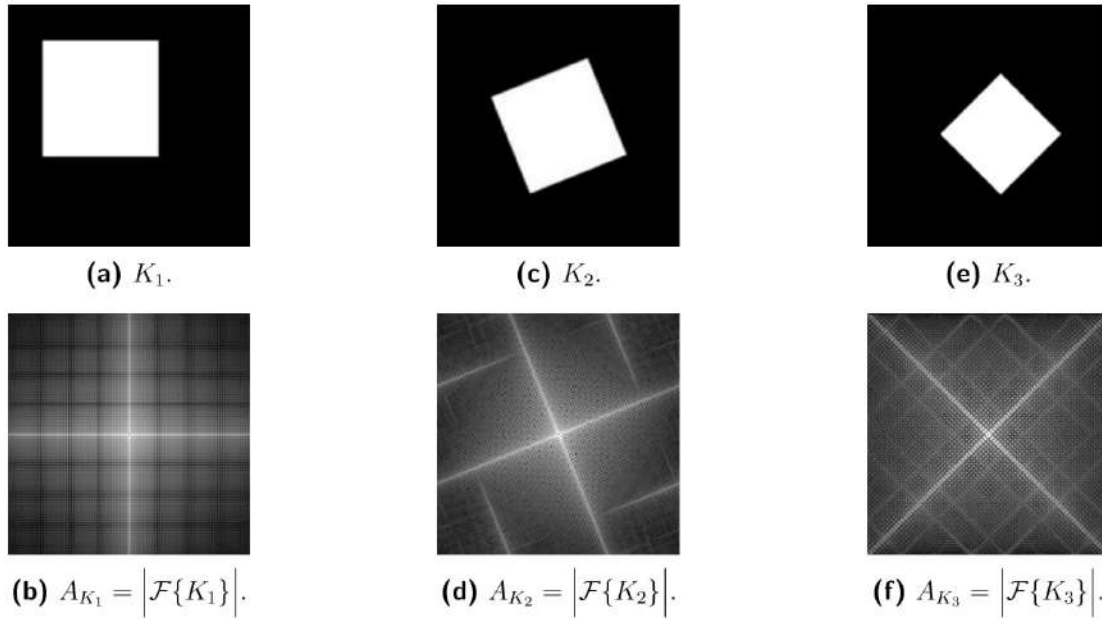
La Fig. 2a, 2c y 2e muestra las transformada analítica de Fourier-Mellin de  $A_{K_1}$ ,  $A_{K_2}$  y  $A_{K_3}$ , respectivamente. Se observa que las imágenes no presentan invarianza a escala y que la rotación se manifiesta por medio de una traslación circular en la variable angular. La Fig. 2b, 2d, 2f presenta la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada de la Fig. 2a, 2c y 2e, respectivamente, donde se observa la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación y escala.

Por último, la invarianza a rotación se obtiene por medio de la transformada de Radon,

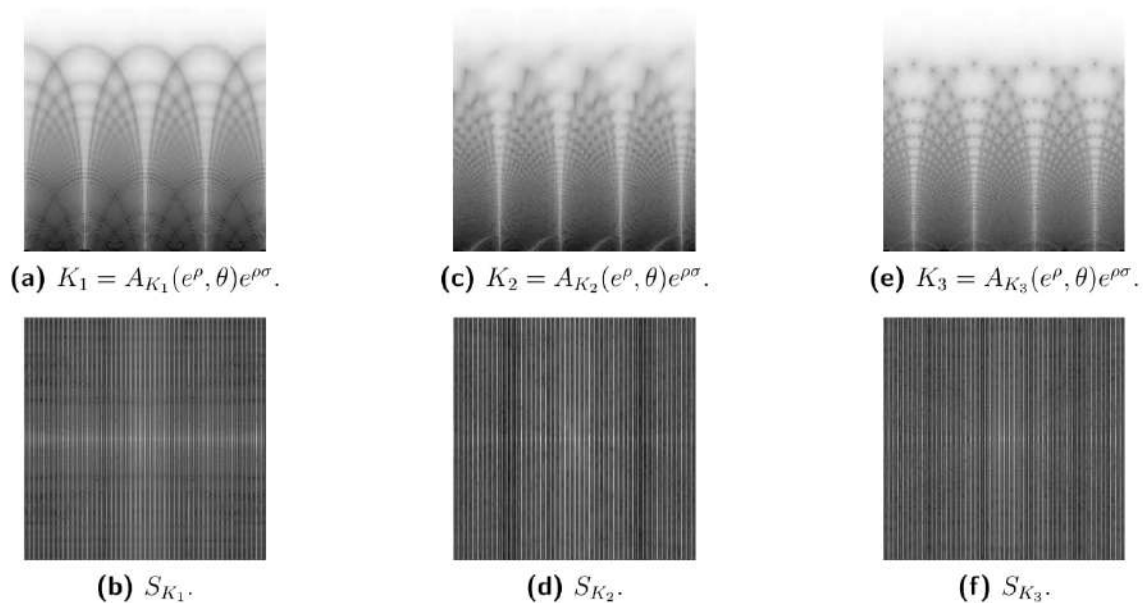
$$\mathcal{R}(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(k, c) \delta(p - k \cos \theta - c \sin \theta) dkdc, \quad (4)$$

donde  $S_M(k, c)$  es la imagen obtenida en la ecuación 2, y  $\delta$  es la función delta de Dirac,  $-\infty < p < \infty$  y  $0 \leq \theta < \pi$ .

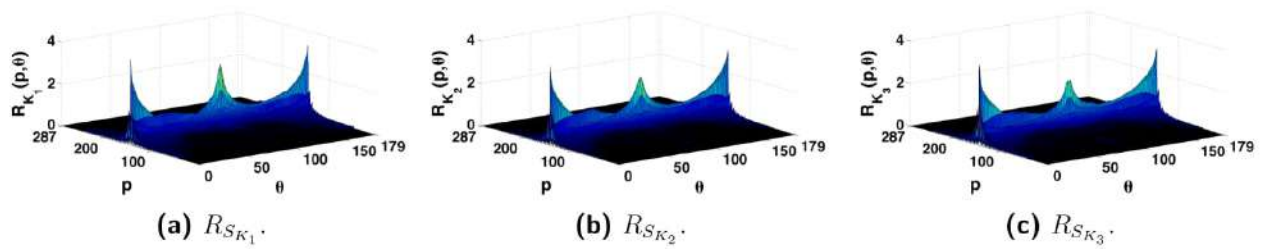
En la Fig. 3 se muestra la respuesta del descriptor RFM invariante a traslación, escala y rotación de las imágenes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , respectivamente.



**Figura 1:** El módulo de la transformada de Fourier de imágenes digitales (señales 2D). Por cuestiones de visualización, el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes se muestra en escala logarítmica.



**Figura 2:** El módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada usando  $\sigma = 1$ . Por cuestiones de visualización, el módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin se muestra en escala logarítmica.



**Figura 3:** Ejemplos de la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones RFM.

Para reducir el número de operaciones y por ende el tiempo de cómputo del sistema de reconocimiento de patrones en la etapa de la clasificación, se construyó la firma 1D invariante a traslación, escala y rotación, mediante

$$V(p) = \sum_{\theta=0}^{179} R_A(p, \theta), \quad (5)$$

donde  $R_A$  es la imagen obtenida por medio de la ecuación 4 y  $p = 0, \dots, N$ , con  $N$  representando el número de renglones de la imagen  $R_A$ . La ecuación 5 no es otra cosa más que la suma de los valores de intensidad por renglón de la imagen  $R_A$  (valores marginales por renglón).

### 3 El espacio de Clasificación

La base de datos de imágenes de referencia a color utilizada para mostrar la eficiencia del sistema de reconocimiento de patrones RFM consta de 18 imágenes digitales de mariposas, Fig. 4. Cada imagen de la Fig. 4 fue rotada  $360^\circ$  con  $\Delta\theta = 1^\circ$  como tamaño de paso, cada una de esas 360 imágenes se escalaron  $\pm 15\%$ , variando la escala con un tamaño de paso  $\Delta k = 1\%$ . En total se obtuvieron 11,160 diferentes imágenes a color de una mariposa. Al trabajar en el espacio de color RGB, las imágenes se representan a través de tres imágenes monocromáticas, las cuales corresponden a los canales rojo, verde y azul, respectivamente. De esa manera, se tendrá un total de 33,480 imágenes en escala de grises para cada imagen de referencia de la Fig. 4.

Para construir un espacio de clasificación, se trabajará con la potencia de la firma 1D, ecuación 5. La potencia se define como

$$P_{\theta,k}^C = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \left( V_{\theta,k}^C(p) \right)^2, \quad (6)$$

donde  $C = R, G$  o  $B$  (el canal de color) y  $N$  es el tamaño de la firma.

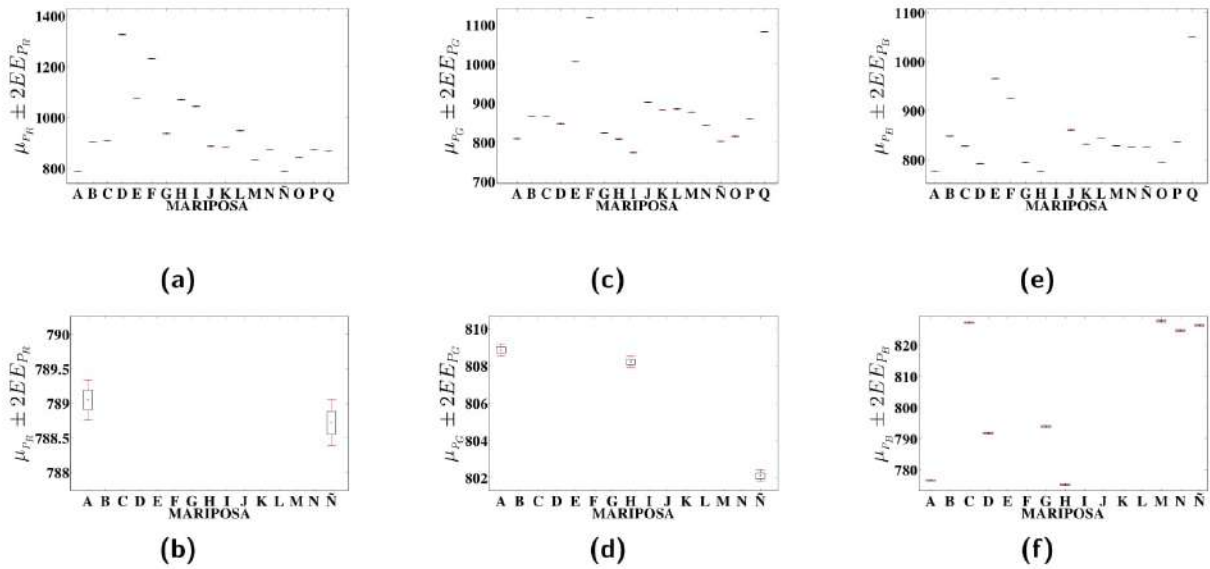
Para cada canal de cada imagen se generaron 11,160 imágenes monocromáticas, por lo que por cada imagen se generan 11,160 elementos escalares correspondientes a las potencias de las firmas 1D invariantes a traslación, escala y rotación. Por el teorema del límite central podemos suponer que los datos del conjunto tienen un comportamiento aproximado al de una distribución normal con media muestral  $\mu_{P_C} \sim \mu$  y con un error estándar  $\frac{\sigma_{P_C}}{\sqrt{n}}$  ( $1EE_{P_C}$ ), donde  $n$  es el tamaño de la muestra, para este ejemplo  $n = 11,160$ . Por medio de esto, se generaron intervalos de confianza del 95.4% de la forma  $[\mu_{P_C} - 2EE_{P_C}, \mu_{P_C} + 2EE_{P_C}]$ .

En la Fig. 5 se muestra el diagrama de cajas de los intervalos de confianza del 95.4% construidos a partir de las potencias de cada una de las imágenes. En el eje horizontal se indica la imagen monocromática de referencia y en el eje vertical el valor de la media de los datos  $P_C$  con  $\pm 2EE_{P_C}$ . El punto central en color negro representa el valor de la media muestral  $\mu_{P_C}$ , el rectángulo en negro corresponde a los valores de la media  $\mu_{P_C} \pm 1EE_{P_C}$  y los bigotes en rojo a los valores de la media  $\mu_{P_C} \pm 2EE_{P_C}$ .

Para las imágenes de referencia de la Fig. 4, el espacio de clasificación se construyó mediante los intervalos mostrados en la Fig. 5. Se generó un ortoedro para cada imagen cuyas aris-



**Figura 4:** Imágenes a color de mariposas.



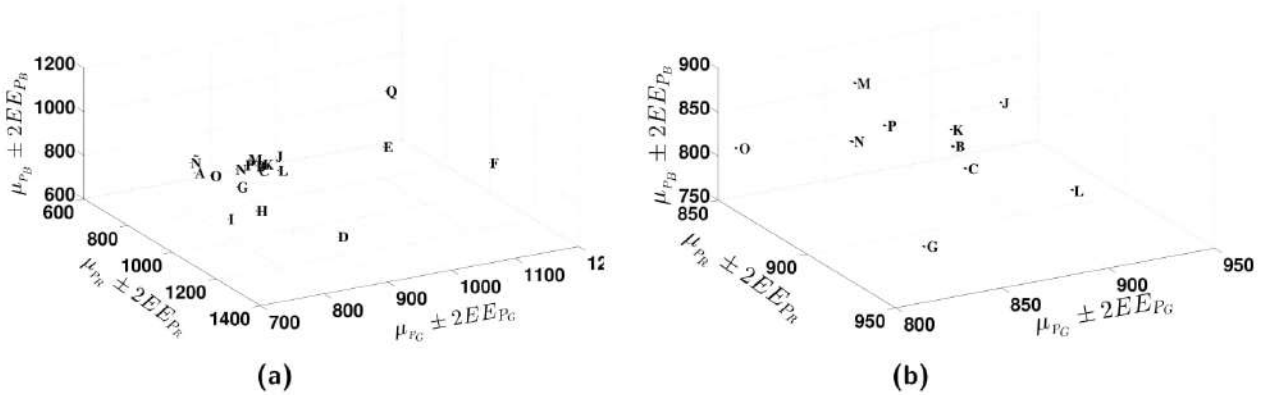
**Figura 5:** Intervalos de confianza. (a), (c) y (e) intervalos de confianza del 95.4 % generados a partir de los conjuntos  $P_R$ ,  $P_G$ ,  $P_B$ , respectivamente. (b), (d) y (f) ampliación en la zona de A-Ñ de las Fig. 5a, 5c y 5e, respectivamente.

tas corresponden a los intervalos de confianza del 95.4 % de los canales  $R$ ,  $G$  y  $B$ . En la Fig. 6a se muestran dichos espacios de clasificación. Para mostrar con claridad que el sistema de reconocimiento de patrones RFM clasifica eficientemente cada una de las imágenes, se presenta una ampliación en la Fig. 6b donde se observa que ninguno de los ortoedros se traslapa. Logrando de esa manera tener un único espacio de clasificación y así reducir el tiempo de cómputo en la

etapa de clasificación de las imágenes digitales.

## 4 Conclusiones

Basado en la teoría de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier-Mellin y la transformada de Radon, se desarrolló el sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin para imágenes digitales a color que es invariante a traslación, escala y rotación con un



**Figura 6:** Espacio de clasificación. (a) Ortoedros de confianza del 95.4 % para la base de datos de la Fig. 4. (b) Amplificación de la zona más concurrida de la Fig. 6a.

nivel de confianza de al menos el 95.4 %.

Los sistemas de reconocimiento de patrones RFM existentes en la literatura utilizan la función de correlación 2D en la etapa de clasificación, esto significa que trabajan con imágenes (matrices) invariantes a traslación, escala y rotación. En este trabajo se muestra una técnica de clasificación que permite reducir el tiempo de cómputo, por medio de firmas 1D invariantes a traslación, escala y rotación, puesto que ahora sólo se requiere usar la correlación 1D. Más aún, en lugar de trabajar con múltiples planos de salida, como se hace en los sistemas de reconocimiento de patrones que utilizan funciones de correlación, se generó un único espacio de clasificación utilizando las potencias de las firmas, esto permite reducir aún más el número de operaciones y por ende, el tiempo de cómputo.

**Agradecimientos.** A CONACYT por la beca otorgada para la realización de la tesis bajo el proyecto de Ciencia Básica SEP-CONACYT 2011 con número 169174 y titulado reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante máscaras binarias de anillos concéntricos y firmas unidimensionales invariantes a posición, rotación y escalamiento.

## Referencias

- [1] Arodz, T. Invariant object recognition using Radon-Based transform. *Computing and Informatics*, 24: 183–199, 2012.
- [2] Bracewell R. N. The Fourier Transform and its Applications. *McGraw-Hill Higher Education*, 2000.
- [3] Cristancho A. A., Rojas C. L. Algoritmo de tomografía local basado en la transformada discreta wavelet. *Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT, Medellín*, 2011.
- [4] Derrode S., Ghorbel F. Robust and efficient Fourier-Mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description. *Computer vision and image understanding*, 83: 57–78, 2010.
- [5] Derrode S. Représentation de formes planes à niveaux de gris par différentes approximations de Fourier-Mellin analytique en vue d’indexation de bases d’images. *Tesis Doctoral, Université de Rennes I*, 1999.
- [6] Epstein, C. L. Introduction to the mathematics of medical imaging. *Siam*, 2008.
- [7] ELouedi I., Fournier R., Nait-Ali A., Hamouda A. The polynomial discrete Radon transform. *Signal, Image and Video Processing*, 1–10, 2014.
- [8] Essaidani D., Seddik H., Ben B., E. Asynchronous invariant digital image watermarking in Radon field for resistant encrypted watermark. *International Journal of Network Security*, 2014.
- [9] Feldman J. Discrete-time Fourier Series and Fourier Transforms. 2007.
- [10] González R. C., Woods R. E. Digital Image Processing. *Prentice Hall*, New York 2002.



- [11] González R. C., Woods R. E., Eddins S. L. Digital Image Processing Using MATLAB. *Tata McGraw Hill Education Private Limited*, New York 2010.
- [12] HSU P. H. Análisis de Fourier. *Prentice Hall*, New York 1970.
- [13] Kailey B. Mathematic of medical imaging inverting the radon transform.
- [14] Lokenath, D., Dambaru, B. Integral Transforms and Their Applications. *Chapman & Hall/CRC*, EE.UU. 2007.
- [15] Lokenath, D., Dambaru, B. Integral Transforms and Their Applications. *Chapman & Hall/CRC*, EE.UU. 2015.
- [16] Miciak M. Radon transformation and principal component analysis method applied in postal address recognition task. *IJCSA*, 7.3: 33–44, 2010.
- [17] Osgood B. The Fourier Transform and its Applications. *Notas de clase, Electrical Engineering Department*, Stanford University 2007.
- [18] Butzar P. L., Jansche S. Mellin-Fourier Series and the Classical Mellin Transform. *Computers & Mathematics with Applications*, 40: 49–62, 2000.
- [19] Quintero V. L. C. Descriptor invariante a posición y escala para imágenes digitales usando la transformada analítica de Fourier-Mellin. *Tesis de Licenciatura*, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua UNAN-LEÓN, 2015.
- [20] Rodríguez M. R., Sossa A. J. H. Procesamiento y Análisis Digital de imágenes. *Alfaomega*, México, 2012.
- [21] Ross M. S. Introduction to probability and statistics for engineers and scientists. *Elsevier Academic Press*, EE.UU., 2004.
- [22] Shih F. Y. Image processing and pattern recognition. *Wiley*, New Jersey, 2010.
- [23] Solís V. A., Álvarez B. J., Solorza S. Adaptive non-linear correlation with a binary mask invariant to rotation and scale. *Optics Communications*, 339: 185–193, 2015.
- [24] Solorza-Calderón, S., Verdugo-Olachea J. A RFM Pattern Recognition System Invariant to Rotation, Scale and Translation. *Iberoamerican Congress on Pattern Recognition*, Springer International Publishing, 2015.
- [25] Solorza S., Álvarez B. J. Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary rings masks. *Journal of Modern Optics*, 62: 851–864, 2015.
- [26] Solorza S., Álvarez B. J. Reconocimiento de patrones en imágenes digitales de fósiles de diatomeas. *Notas de clase*.
- [27] Verdugo-Olachea, J. Reconocimiento de Patrones en Imágenes Digitales usando la Transformada de Radon. *Tesis de Licenciatura*, Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias, 2015.
- [28] Villegas S. M. Determinacion de la posición de objetos en imágenes usando la Transformada de Fourier-Mellin Analítica. *Proyecto Final de Carrera*, Universidad Politécnica de Valencia 2004.
- [29] Zhang, Y., Wu, L. A rotation invariant image descriptor based on Radon transform. *International Journal of Digital Content Technology and its Applications* 5: 209–217, 2011.
- [30] Zwicke P. E., Kiss Jr, I. A new implementation of the Mellin transform and its application to radar classification of ships. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2: 191–199, 1983.

# Modelo de clasificación acorde a parámetros de atención primaria de adultos mayores en el municipio de Saltillo, Coahuila.

José Luis Fraga Almanza<sup>1\*</sup> José Refugio Reyes Valdés<sup>1</sup>

Rina Betzabeth Ojeda Castañeda<sup>1</sup>

Ma. del Pilar Alonso Reyes<sup>2</sup> José Antonio Flores Díaz<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas, UAdeC

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, UNAM

\*jfraga@cima.uadec.mx

## Resumen

La magnitud e importancia del crecimiento de la población de los adultos mayores a nivel mundial, ha obligado a los gobiernos a establecer políticas públicas idóneas para este sector de la población, como es el caso de políticas para el sistema de salud y la integración plena de las personas mayores como participantes activos en el desarrollo social. En este documento se presenta un modelo estadístico de clasificación que permite identificar las variables más significativas que presenta un adulto mayor en el caso de una urgencia médica. Con la identificación el modelo clasifica cuales son los principales síntomas, a partir del registro histórico de dichas variables. La información histórica de éstas fue obtenida a partir de los registros del FRAP de Patronato de Cuerpo de Bomberos en el periodo del 2013 al 2014 en la atención de urgencias de adultos mayores del municipio de Saltillo Coahuila, México. Adicionalmente se presenta las características del modelo y los fundamentos teóricos de éste, así como los resultados obtenidos con su aplicación al caso señalado.

*Palabras clave:* Vejez; Agrupamiento; Modelo estocástico; Modelo de clasificación;

## 1 Introducción

En el municipio de Saltillo Coahuila al igual que en otros municipios del país los adultos mayores están siendo una base creciente de la población total. Esta situación está impulsando en su sociedad actual cambios de gran magnitud, especialmente, con relación a la plena atención de sus adultos mayores en aspectos de salud y en la integración de las personas mayores como participantes activos en el desarrollo de la sociedad.

Para lograr este objetivo es necesario contar con mecanismos que permitan obtener informa-

ción relevante sobre la salud y la atención médica en este sector de la población. Uno de estos mecanismos sería recabar la información necesaria para conocer los principales síntomas de los adultos mayores de Saltillo ante una urgencia médica. Para ello, además de analizar la estructura demográfica poblacional de dicho sector, es necesario hacer un análisis estadístico de las principales variables que representan el estado clínico de un paciente atendido en una urgencia médica, con el fin de que los paramédicos que atienden la urgencia cuenten con información de relevancia en la atención del adulto mayor. Además con esta información es posible establecer un modelo

estocástico de clasificación de las variables más significativas.

Los modelos estocásticos de clasificación en general permiten agrupar un conjunto de datos en clases, utilizando técnicas de la minería de datos. En este trabajo los datos a agrupar corresponden a variables que representan los síntomas seleccionados por el médico o paramédico que atendió la urgencia médica. Para el diseño y desarrollo de este tipo de modelos se aplica la metodología estadística relacionada con el análisis multivariado y la correlación de variables. El éxito de estos modelos depende de que se tenga información confiable de las variables, motivo por el cual en el caso que nos ocupa fue necesario desarrollar un sistema de cómputo móvil que permitiera registrar los datos de manera confiable y segura, para tener un histórico confiable y estructurado. Este sistema no será presentado en este trabajo para mayor información ir, Almanza [1].

## 2 Descripción del problema

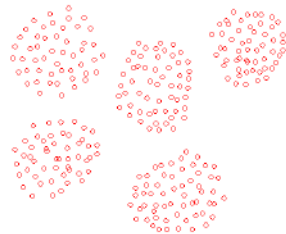
Actualmente no existe un modelo estocástico que a partir de parámetros clínicos de un paciente obtenga una clasificación y jerarquización de los síntomas que presenta a partir de la información histórica de un adulto mayor en una situación de urgencia médica. Como por ejemplo desmayo, caídas, comas diabéticos, problemas vasculares, entre otros.

En la ciudad de Saltillo la atención de las urgencias médicas le corresponde atenderlas al Patronato del Cuerpo de Bomberos, quienes registran el estado clínico del paciente para posteriormente canalizarlos a los diferentes hospitales de la ciudad. Por este motivo a los médicos o paramédicos que atienden las urgencias les servirá de ayuda contar con una clasificación de los principales síntomas.

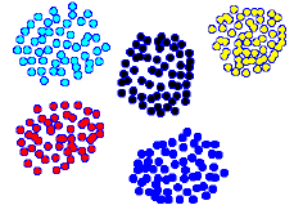
## 3 Marco teórico

El *clustering* organiza los datos (un conjunto de síntomas como un vector de mediciones) extrayendo estructuras subyacentes. El agrupamiento finaliza cuando los patrones dentro de un grupo (*cluster*) son lo más similares entre sí que con otros patrones que pertenecen a otros grupos diferentes. Por lo tanto, organizar los datos usando *clustering* se emplea alguna medida de similitud entre los conjuntos de patrones. El *cluster* se define con base en los datos y propósito del análisis, Eldén [3].

El agrupamiento de datos o simplemente *clustering* es considerado uno de los problemas más importantes en el aprendizaje no supervisado, es decir, como en todos los problemas de este tipo, lo que se trata de hacer es encontrar grupos en un conjunto de datos. De manera más general puede definirse el agrupamiento de datos como *el proceso de organización de objetos que son muy similares de alguna manera*, ver figuras 1, 2.



**Figura 1:**  
Conjunto de datos.



**Figura 2:**  
Agrupamiento.

El agrupamiento de datos a menudo suele confundirse con la clasificación de datos, en donde los objetos son asignados a clases ya establecidas. Es decir, en este tipo de problemas las clases también tienen que ser definidas, Gan et al. [4].

Este análisis trata de resolver el problema siguiente.

**Definición 1** Dado un conjunto de datos  $D$  con  $n$  objetos, una partición de  $D$  en  $k$  grupos es una familia de conjuntos  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$  que cumple con las siguientes propiedades:

$$1. \pi_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k$$

$$2. \bigcup_{i=1}^k \pi_i = D$$

$$3. \pi_i \cap \pi_j = \emptyset \quad i \neq j$$

**Definición 2** Dado un conjunto  $D$  de datos con  $n$  objetos en un espacio  $m$ -dimensional, particionar los mismos en  $k$  grupos tales que los puntos dentro de un grupo son más similares entre ellos que con otros grupos, dicha similitud se mide atendiendo a alguna función distancia.

El problema de formar grupos es muy importante para el conocimiento del comportamiento de un conjunto de datos del cual solo se tiene una cantidad  $n$  de sus elementos. La solución a estos problemas se realiza mediante la aplicación de algoritmos de agrupamiento, o incluso la creación de nuevos algoritmos.

**Definición 3** Dado un conjunto de datos  $D$  y  $\Pi = (\pi_l)_{l=1}^k$  una partición de  $D$  en  $k$  clases, decimos que  $\pi_l$  es un cluster si se cumplen las siguientes propiedades:

$$1. \text{ Si } x \text{ y } y \text{ tienen mayor similitud} \Rightarrow x, y \in \pi_l, \text{ donde } x, y \in D$$

$$2. \text{ Si } x \text{ y } y \text{ tienen menor similitud} \Rightarrow x \in \pi_l \text{ y } y \in \pi_m, \text{ donde } x, y \in D$$

Se han propuesto diferentes técnicas o algoritmos para encontrar agrupamientos o clusters adecuados a diversos requerimientos. En general se pueden clasificar en jerárquicos y particionados.

**Jerárquicos:** Este agrupamiento es utilizado cuando no se tiene conocimiento de cuántos cluster o grupos existen. Producen una secuencia de particiones, juntando o separando clusters. En cada caso se juntan o separan dos clusters siguiendo algún criterio específico.

**Particionados:** Este agrupamiento realiza una división inicial de los datos en grupos y luego mueve los objetos de un grupo a otros según

se optimice alguna función objetivo. Estos algoritmos presuponen un conocimiento a priori del número de clusters en que debe ser dividido el conjunto de datos. Llegan a una división en clases que optimiza un criterio predefinido o una función objetivo.

## 4 Aplicación del modelo de clasificación y análisis

Ante la ausencia de un diagnóstico final en el FRAP (Formato para el Registro de la Atención Prehospitalaria de las Urgencias Médicas) Mexicana [7], ya que solo se recaba la información del paciente hasta su traslado a un centro especializado, y no se da un seguimiento de las condiciones o causas determinadas de la urgencia médica, se desarrolló un modelo jerárquico del tipo no supervisado, James G. and Hastie T. [5], Lesmeister [6]. La clasificación se realizó en grupos como estrategia heurística para establecer categorías que sirvieron de base a especialistas para aportar información que sería utilizada como diagnóstico estimado.

Las principales variables seleccionadas para el análisis de clasificación por tipo se muestran en la Tabla 1.

Excluyendo las variables asociadas a la identificación del FRAP, tiempos de atención y la temperatura, ya que esta última contaba con 86 registros diferentes de cero de los cuales solamente cinco eran efectivos, fueron eliminadas del análisis; además que de acuerdo a los especialistas médicos la temperatura no es relevante, el resto de las variables fueron susceptibles de integrarse al modelo de predicción.

El total de registros en el segmento de adultos mayores fue de 855, en virtud de que en algunas variables no existían valores capturados para algún paciente específico. En este caso y dependiendo del tipo de variable se excluyeron los registros o bien se integraron como datos faltantes.

Antes de realizar la clasificación mediante un modelo jerárquico fue necesario llevar a cabo un

**Tabla 1:** Principales variables del análisis

Nombre	Registros
Num.FRAP	855
Estacion	855
Tiempos de atención	855
Motivo atención	788
Sexo	848
Edad	855
Origen probable	661
Nivel de conciencia	784
Via aerea	760
Ventilacion observada	774
Ventilacion auscultada	757
Circulacion: Presencia de pulsos	767
Circulacion: Calidad	691
Circulacion: Piel	757
Frecuencia respiratoria	565
Frecuencia cardiaca	640
TA Sistolica	619
TA Diastolica	619
SaO2	462
Temperatura	86
Glucosa	100
Alergias	570
Enfermedades	697
Condición del paciente	529
Prioridad	723

análisis de las correlaciones categóricas entre algunas de las principales variables. Con ello se obtuvo en primera instancia asociaciones entre ellas que permitieron establecer diagnóstico. En la primera subsección se presenta el estudio entre aquellas variables que se espera tengan fuerte interacción cuando se presentan urgencias médicas.

#### 4.1. Correlaciones de variables principales

En esta sección se presenta el análisis de las correlaciones categóricas entre las variables: sexo, enfermedades, motivo de atención y edad, que presentaron una fuerte interacción.

##### 4.1.1. Sexo vs Enfermedades

En adultos mayores el motivo de atención en una urgencia diferido por sexo es de relevancia,

**Tabla 2:** Frecuencias por sexo y enfermedad

	SI	NO
fem	58	297
mas	64	189

ya que las actividades por sexo suelen ser distintas, originando causas diversas.

Asociada a la edad del segmento de población que se estudia, la presencia de enfermedades contrastada con el sexo se consideró pertinente para su análisis. La Tabla 2 presenta las frecuencias observadas para estas dos variables.

Usando el lenguaje de programación R, la prueba de Fisher (p-value = 0,007538) y la de Pearson (p-value = 0,008897), mostraron que si existe una diferencia significativa en la presencia o no de enfermedad en relación al sexo en el caso de urgencias médicas. El resultado indica que tiende a haber más mujeres con enfermedad que hombres.

##### 4.1.2. Sexo vs Motivo de atención (enfermedad o traumatismo)

Al contrastar la variable dicotómica sexo vs motivo de atención (enfermedad o traumatismo), se obtuvo la siguientes frecuencias presentadas en la Tabla 3.

**Tabla 3:** Frecuencias por sexo y motivo de atención

	enfermedad	traumatismo
fem	323	125
mas	278	56

Fuete: Elaboración propia

Bajo esta combinación la prueba de Fisher (p-value = 0,0003037) y  $\chi^2$  de Pearson (p-value = 0,0003619), arrojan una diferencia significativa. Esto quiere decir que, de acuerdo a las proporciones obtenidas, es más frecuente atender a personas del sexo femenino por traumatismo que las del sexo masculino.

Una de las posibles razones de que la emergencia asociada a mujeres es por traumatismo

radica en que a esa edad suele perder grandes cantidades de calcio y a que son más activas, esto se da particularmente en actividades asociadas al hogar .

#### 4.1.3. Edad vs Motivo de atención (enfermedad o traumatismo)

Al contrastar las variables edad y motivo de atención se pudo identificar el rango de edades en el que el adulto mayor presenta mayor frecuencia en cuanto al motivo de la atención, ya sea por enfermedad o por traumatismo. Se obtuvieron las frecuencias que aparecen en la tabla de frecuencias, ver Tabla 4.

**Tabla 4:** Frecuencias por edad y motivo de atención

	enfermedad	traumatismo
(60,65]	89	22
(65,70]	88	28
(70,75]	119	12
(75,80]	62	27
(80,85]	66	20
(85,90]	64	8
(90,95]	30	2
(95,100]	2	1
(100,105]	0	1
(105,110]	1	0

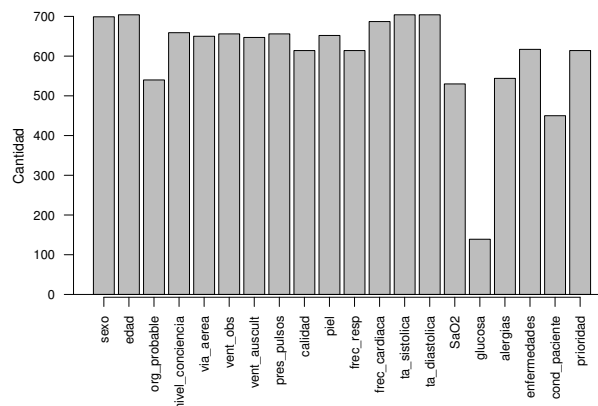
Fuente: Elaboración propia

En la prueba de  $\chi^2$  de Pearson el *p-value* indicó que el motivo de la atención si depende de la edad del adulto mayor, (*p-value*= 0,0004235). Siendo que la edad donde más frecuentemente se presenta por causa de enfermedad es la de 70 y 75 años, mientras que por traumatismo esta en las edades de 65 a 70 y 75 a 80 años de edad.

## 4.2. Resultados del modelo jerárquico de de clasificación

Uno de los principales problemas de los registros de los FRAPs se presentó por que no contaban con un mecanismo de validación. Esta situa-

ción tuvo como resultado la anulación de datos no válidos. Después de la depuración y selección de variables que podían integrarse al modelo de clasificación, quedaron unicamente 700 registros. En la Figura 3 se representan la cantidad de datos válidos para cada variable.



**Figura 3:** Datos válidos para cada una de las variables

La variable que menos datos útiles tuvo fue la glucosa. Por la importancia que tiene esta variable asociada al perfil regional, se integró inicialmente al modelo de clasificación aún y cuando con ello se redujo significativamente la cantidad total de datos válidos, ya que al eliminar registros de datos con al menos una variable con valor nulo, la combinación con otras incrementa la cantidad de datos eliminados.

En esta fase el modelo de clasificación fue de tipo no supervisado en el cual se incorporan variables cualitativas y cuantitativas. Para considerar el agrupamiento de este tipo de variables se propuso en este trabajo utilizar el método de PCAmix el cual se define a continuación, Chavanet et al. [2].

**Definición 4** *El PCAmix se define por la mezcla de las variables cuantitativas y cualitativas e incluye el análisis de componentes principales (PCA) y el análisis de correspondencias múltiples (ACM).*

- $V_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$  variables cuantitativas
- $V_2 = \{z_1, \dots, z_m\}$  variables cualitativas

- Sea  $X$  y  $Z$  las matrices de datos cuantitativas y cualitativas respectivamente
- Sea  $P = (C_1, \dots, C_k)$  una partición de  $V = V_1 \cup V_2$
- La homogeneidad de esa partición  $P$

$$H(P) = \sum_{k=1}^k H(C_k, y_k)$$

donde  $y_k$  es el centroide de  $C_k$

- La función  $H$  mide el ajuste entre  $C_k$  y  $y_k$

$$H(C_k, y_k) = \sum_{x_j \in C_k} r^2(x_j, y_k) + \sum_{z_j \in C_k} \eta^2(z_j, y_k)$$

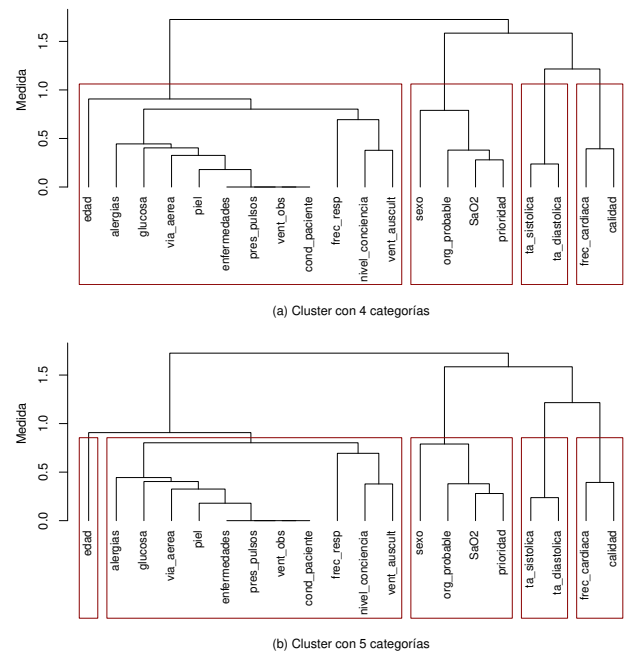
donde  $r^2(x_j, y_k)$  es la correlación al cuadrado de  $x_j$  con  $y_k$  y  $\eta^2(z_j, y_k)$  es la correlación ratio entre  $z_j$  y  $y_k$

En el caso de la inclusión de la glucosa se utilizaron, en primera instancia, 20 variables para determinar los grupos correspondientes, 7 de las cuales son cuantitativas y 13 cualitativas. Las Figuras 4(a) y 4(b) muestran los grupos establecidos con resoluciones 4 y 5 respectivamente.

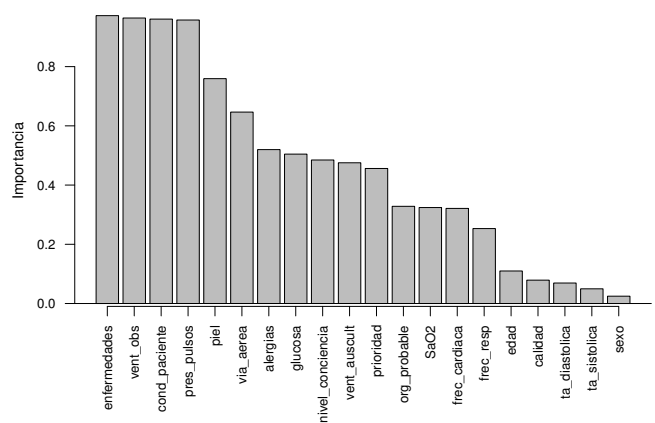
En el proceso de identificación de grupos se estableció una medida de importancia de cada una de las variables. La importancia es de naturaleza estadística ya que se asocia la medida en que cada una de las variables contribuye en la reducción del criterio de optimización, cada vez que es incorporada al árbol. El criterio establecido para la formar de grupos de las variables tipo cuantitativo fue la correlación al cuadrado del centro a cada una de las observaciones ( $r^2(x_j, y_k)$ ) y para las variables cualitativas fue la relación de la correlación del centro a cada una de las observaciones ( $\eta^2(z_j, y_k)$ ).

Una vez establecida la clasificación óptima (Primer componente principal de PCAmix), la importancia de las variables se muestra en forma ordenada de mayor a menor en la Figura 5.

La clasificación obtenida con el modelo propuesto no aporta información acerca de las posibles causas de los valores en los parámetros,



**Figura 4:** Clasificación jerárquica basada en parámetros principales



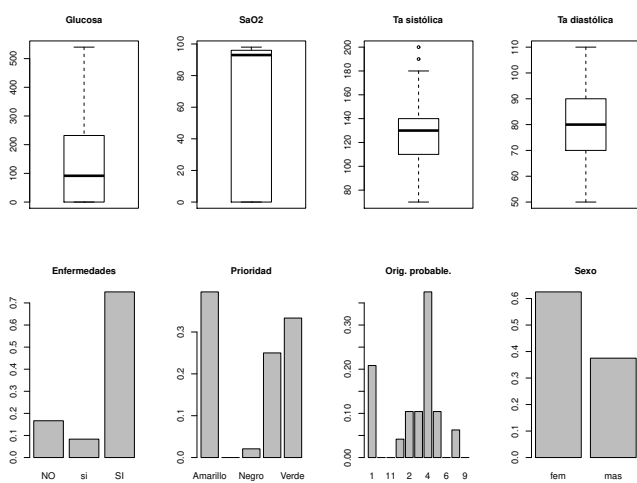
**Figura 5:** Orden de importancia de los parámetros principales

esto debido a que no se cuenta con una variable respuesta. Ante esta limitación, una vez seleccionada la cantidad de grupos de variables, se elabora un cuadro resumen de las características observadas en cada uno de estos grupos.

Para efecto de análisis se tomaron los cinco grupos de referencia que se presentan en la Figura 4(b). Dado que existen variables cualitativas y cuantitativas se incluyen de ambos tipos ya que esto aporta comportamiento de parámetros

en urgencias médicas que sirven de referencia a personal especializado en esa área de la medicina.

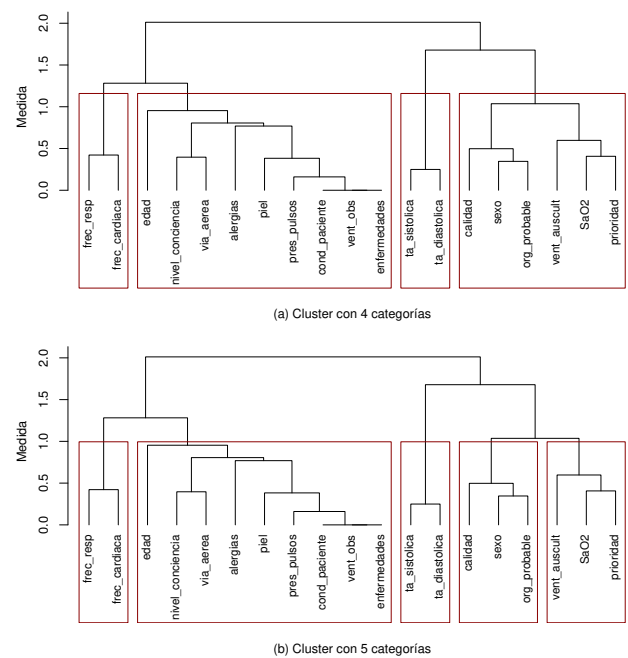
Las cuatro variables cuantitativas más importantes, de acuerdo a la clasificación jerárquica son glucosa, SaOs2, ta\_sistolica y ta\_diastolica. Las principales variables categóricas son enfermedades, prioridad, org\_probable y sexo. Como referencia del comportamiento estadístico de cada una de estas variables en la Figura 6 se muestran los diagramas de caja para las cuantitativas y de barras para las categóricas; para estas últimas se muestran las frecuencias relativas.



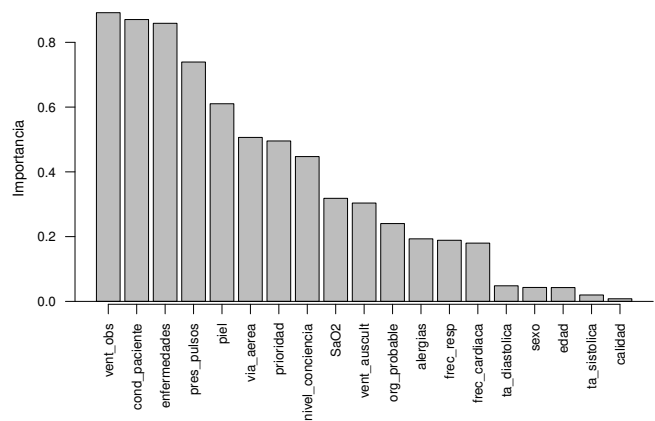
**Figura 6:** Variables cualitativas y cuantitativas más importantes

### 4.3. Clasificación sin la variable glucosa

Ante la máxima cantidad de datos anulados en la variable glucosa y con la combinación de datos nulos en otras variables, es pertinente jerarquizar sin incluir esta variable, para comparar resultados obtenidos con ella incluida, la Figura 7 muestra la clasificación jerárquica resultante. Como se observa en la Figura 7, la clasificación sin glucosa difiere sustancialmente de la obtenida al incluir esta variable. Comparando la calidad de la segmentación en grupos, sin glucosa, ver Figura 8, esta resulta mejor, ya que se incrementa sustancialmente la cantidad de datos utilizados.



**Figura 7:** Clasificación jerárquica (sin glucosa)



**Figura 8:** Importancia de parámetros principales (sin glucosa)

La deficiencia en el tamaño de la muestra en el caso de incluir glucosa y la influencia que ésta puede tener origina diferencias significativas en el orden de importancia, como se puede apreciar en las Tabla 5 y la Figura 8.

Tomando como referencia las cinco variables más importantes de cada una de las clasificaciones, las variables de origen probable y prioridad aparecen en ambos casos.

Si se consideran las cinco variables menos im-



**Tabla 5:** Comparación de importancia de variables con y sin glucosa

	CGLU	SGLU
1	enfermedades	vent_auscult
2	prioridad	org_probable
3	org_probable	piel
4	glucosa	vent_obs
5	SaO2	prioridad
6	sexo	calidad
7	vent_obs	nivel_conciencia
8	calidad	Sexo
9	cond_paciente	SaO2
10	nivel_conciencia	ta_diastolica
11	ta_sistolica	via_aerea
12	ta_diastolica	enfermedades
13	pres_pulsos	pres_pulsos
14	alergias	cond_paciente
15	piel	frec_cardiaca
16	frec_cardiaca	ta_sistolica
17	frec_resp	Edad
18	edad	Alergias
19	via_aerea	frec_resp
20	vent_auscult	

Fuente: Elaboración propia

portantes, se observa que las variables frecuencia cardiaca, frecuencia respiratoria y edad están presentes en ambos casos. Sin embargo existen cambios en el orden de significancia de las variables.

Dos cambios de orden significativo se aprecian, y el más drástico corresponde a la variable vent\_auscult ya que al incluir la variable glucosa aparece como la menos importante y sin incluirla como la más importante. También la variable piel muestra un comportamiento similar aunque no tan drástico; con glucosa aparece en la posición 15 y sin glucosa en la posición 3.

## 5 Conclusiones

Con base a la información depurada de los FRAPs proporcionada por el Patronato del Cuerpo de Bomberos de Saltillo Coahuila(PCB), se pudo aplicar el modelo de clasificación con dos modalidades, incluyendo la variable glucosa presentándose diferencias significativas en ambos casos, las diferencias se presentaron dado que la variable glucosa no contaba con información suficiente para llevar un análisis confiable con dicha

variable.

Con el fin de que el modelo pueda ser aplicado en el trabajo de investigación se desarrolló un sistema de cómputo móvil que permite registrar de manera confiable y segura la información asociada al estado clínico del paciente en una situación de urgencia médica por parte de los paramédicos del PCB.

## Referencias

- [1] José Luis Fraga Almanza. Sistema de monitoreo de alertas en urgencias médicas y modelo de clasificación acorde a parámetros de atención primaria de adultos mayores en el minicipio de saltillo, coahuila. Master's thesis, Universidad Autónoma de Coahuila, 2016.
- [2] Marie Chavanet, Vanessa Kuentz, Bnoit Liqueet, and Jérôme Saracco. Clustofvar: an r package for the clustering of variables. In *The R User Conference, University of Warwick*, 2011.
- [3] Lars Eldén. *Matrix methods in data mining and pattern recognition*. SIAM, 2007.
- [4] Guojun Gan, Chaoqun Ma, and Jianhong Wu. *Data clustering: theory, algorithms, and applications*, volume 20. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [5] Witten D. James G. and Tibshirani R. Hastie T. An introduction to statistical learning with applications in r. Springer, 2013.
- [6] Lesmeister. *Mastering machine learning with r*. Packt Publishing, 2015.
- [7] Cruz Roja Mexicana. Formato para el registro de la atención prehospitalaria de las urgencias médicas (frap). <http://www.frapsedomex.org/>, 2006. Página consultada 10 julio 2014, 11:38 pm.

# Esquema local de preconditionamiento para resolver la ecuación de Poisson mediante funciones de base radial

J.A. García-López<sup>1</sup>, J. Alavez-Ramírez<sup>1\*</sup>, J. López-Estrada<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

<sup>2</sup>Universidad Nacional Autónoma de México

\* justino.alavez@ujat.mx

## Resumen

En este trabajo se explora la construcción de un preconditionador basado en la aproximación de una función cardinal mediante una combinación lineal de funciones multicuádricas, con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo y aminorar los efectos del mal condicionamiento en la solución numérica del sistema lineal asociado a la aproximación de la solución de la ecuación de Poisson mediante un esquema de colocación asimétrico. Se aproxima la función cardinal usando un esquema local, que permite aproximarla tomando en cuenta solo un pequeño subconjunto de nodos del dominio. Varios investigadores proponen reducir el error que ocurre en los nodos del dominio que se encuentran más distantes, mediante la introducción de un conjunto de nodos especiales. En este artículo también se propone una distribución de puntos en el cuadrado unitario, que permiten seleccionar el conjunto de nodos especiales destinados a complementar el esquema local. Finalmente, se hace una comparación entre el número de flops necesarios para calcular el preconditionador y para calcular la pseudoinversa de Moore Penrose.

*Palabras clave:* Método libre de mallas; Nodos especiales; Función cardinal.

## 1 Introducción

Recientemente ha habido un gran interés en métodos sin mallas, como una alternativa al uso de los métodos convencionales como diferencias finitas, elemento finito y volúmenes finitos. Especialmente porque los métodos sin mallas hacen uso de un conjunto de nodos dispersos, pudiendo prescindir de la generación de mallas que consume por lo general alrededor del 70% del tiempo de cómputo necesaria para la implementación de los métodos convencionales [3]. Los métodos desarrollados a partir del uso de funciones de base radial pueden aplicarse indistintamente a problemas con cualquier número de dimensiones, en donde los métodos convencionales presentan dificultades. Tienen diversas aplicaciones

en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) ([7] y [8]) y de problemas de interpolación [4], con lo que han sido utilizadas en la modelación de fenómenos físicos, químicos, económicos y financieros, entre otros. Usualmente se observa un mal condicionamiento del sistema lineal asociado cuando se intenta mejorar la exactitud, así como buen condicionamiento cuando se disminuye la exactitud, lo cual subraya una incierta relación entre estas dos cantidades [12]. Se han propuesto varias alternativas a la problemática relacionada con el mal condicionamiento del sistema asociado ([1], [2], [5], [6], [9], [10] y [11]). Aquí se presenta una alternativa para aminorar el tiempo de cómputo y los efectos de mal condicionamiento del sistema lineal asociado mediante la construcción de

un preconditionador a través de una función cardinal formada por una combinación de funciones de base radial (FBR).

Una  $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  se llama FBR, si existe una función de una variable  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r)$ , donde  $r = \|\mathbf{x}\|_2$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$ .

## 2 Descripción del problema

El problema consiste en resolver la ecuación de Poisson con condiciones de frontera de Dirichlet, es decir

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ p(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

El método propuesto para resolver (1) consiste en encontrar una solución aproximada para la función incógnita  $p$ , que se seguirá llamando  $p$ , como una combinación lineal de funciones multicuadráticas  $\phi$ , es decir

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2),$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $N$  es el número total de nodos  $\mathbf{x}_j$  en el dominio  $\Omega$  y  $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ .

Se supone que la colocación de los nodos han sido arreglados de tal manera que los primeros  $N_I$  están en  $\Omega$  y los últimos  $N_B$  están en  $\partial\Omega$ . De (1) se sigue que para  $i = 1, 2, \dots, N_I$ :

$$f_i = f(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \nabla^2 \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2), \quad (2)$$

y para  $i = N_I + 1, N_I + 2, \dots, N$ :

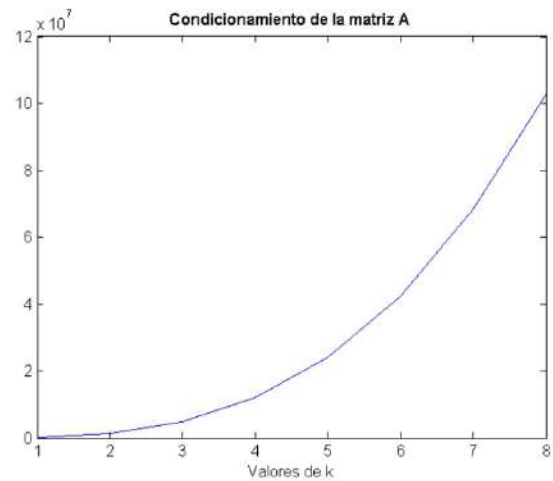
$$g_i = g(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2). \quad (3)$$

Nótese que (2) y (3) determinan un sistema de  $N$  ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas  $\lambda_j$ , dado por

$$A\lambda = \mathbf{f}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{N_I}, g_{N_I+1}, g_{N_I+2}, \dots, g_N)^T$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T$ ,  $A_{ij} = \nabla^2 \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2)$  para  $i = 1, 2, \dots, N_I$  y  $A_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2)$  para  $i = N_I + 1, N_I + 2, \dots, N$  y  $j = 1, 2, \dots, N$  en ambos casos.

La matriz de coeficientes del sistema (4) es generalmente no simétrica y llena, y es mal condicionada, aún para  $N$  moderado. El mal condicionamiento empeora cuando  $N$  crece o cuando se usa una FBR plana (por ejemplo, las multicuadráticas con parámetros de forma  $c$  grandes) [3]. El mal condicionamiento tiene un comportamiento exponencial cuando  $N$  crece, el cual puede apreciarse en la figura 1, en donde se muestra el condicionamiento de la matriz  $A$  cuando se usa el método anterior a una distribución de nodos con  $N = (10^k + 1)^2$ , lo cual subraya la necesidad de usar un método de preconditionamiento.



**Figura 1:** Condicionamiento de la matriz  $A$ , según el tamaño de paso  $\Delta x = \Delta y = 10^{-k}$ .

Aunque existen algunas combinaciones muy raras de las disposiciones de los centros de datos y  $c$  que pueden producir una matriz singular, la singularidad se puede remover al perturbar el valor de  $c$  o los centros de datos (agregando o eliminando centros). En el caso en que ocurra una matriz singular, el preconditionamiento es un esfuerzo inútil [3].

### 3 Método de preconditionamiento mediante aproximación de funciones cardinales

Sea  $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$  un conjunto de centros. Una función cardinal para problemas de interpolación asociada con el centro  $\mathbf{x}_i \in X$  tiene la forma

$$\psi_i(\cdot) = \sum_{j=1}^N \tilde{w}_{ji} \phi(\|\cdot - \mathbf{x}_j\|_2), \quad (5)$$

donde  $\psi_i(\mathbf{x}_i) = 1$  y  $\psi_i(\mathbf{x}_j) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $j \neq i$ . En este caso, la matriz  $\tilde{W}$  con entradas  $\tilde{w}_{ji}$  sería la inversa de la matriz de interpolación FBR sobre el conjunto de datos  $X$  [3]. Un preconditionador  $W$  se calcula de tal forma que el sistema

$$W\lambda = W\mathbf{f},$$

sea más fácil de resolver por el método del residuo mínimo generalizado (GMRES, por sus siglas en inglés) que el sistema (4). En todos los casos discutidos, los preconditionadores resultantes son sparse.

Sean  $\sigma \ll N$  y  $\mathcal{S}_i = [s_i(1), \dots, s_i(\sigma)]$  un subconjunto de los índices  $[1, 2, \dots, N]$  asociados con el centro  $\mathbf{x}_i$ . Suponga que la expresión (5) está formado por un conjunto relativamente pequeño de FBR en lugar de todo el conjunto  $X$  dando una función de base cardinal aproximada (FBCA). Entonces [3],

$$\begin{aligned} \psi_i(\cdot) &= \sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ji} \phi(\|\cdot - \mathbf{x}_j\|_2) \\ &= \sum_{k=1}^{\sigma} w_{i, s_i(k)} \phi(\|\cdot - \mathbf{x}_{s_i(k)}\|_2), \end{aligned}$$

y que satisface la *condición cardinal*:  $\psi_i(\mathbf{x}_i) = 1$  y  $\psi_i(\mathbf{x}_j) = 0$  para  $i \neq j \in \mathcal{S}_i$ . Los otros elementos  $w_{ij}$  son ceros para  $j \notin \mathcal{S}_i$ . En términos generales, el conjunto de índice  $\mathcal{S}_i$  se debe elegir de los centros locales y de algunos puntos especiales tanto para el problema de interpolación como para el problema FBR para EDP. La

elección de  $\mathcal{S}_i$  como conjunto de índices correspondientes a puntos locales únicamente, produce resultados pobres lejos de  $\mathbf{x}_i$ . Sin embargo, al añadir un conjunto ampliamente dispersa de puntos especiales dentro del dominio contrarresta el crecimiento de la FBCA. Puesto que en cada fila  $W_i$  del preconditionador  $W$  tiene únicamente  $\sigma$  entradas diferentes de cero, éstos se calculan resolviendo el sistema

$$B_i^T W_i = e_i$$

donde  $e_i$  representa el  $i$ -ésimo vector de la base estándar de longitud  $\sigma$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , y

$$B_i = \begin{bmatrix} A_{s_i(1), s_i(1)} & A_{s_i(1), s_i(2)} & \cdots & A_{s_i(1), s_i(\sigma)} \\ A_{s_i(2), s_i(1)} & A_{s_i(2), s_i(2)} & \cdots & A_{s_i(2), s_i(\sigma)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s_i(\sigma), s_i(1)} & A_{s_i(\sigma), s_i(2)} & \cdots & A_{s_i(\sigma), s_i(\sigma)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma \times \sigma}.$$

Entonces las entradas de la  $i$ -ésima fila de  $W$  están dadas por

$$W_{ij} = \begin{cases} w_{ik}, & \text{si } j = s_i(k) \text{ para } k = 1, \dots, \sigma \\ 0, & \text{para otro caso.} \end{cases}$$

Así que el cálculo necesario para encontrar el preconditionador  $W$  mediante la aproximación de una función cardinal basada en la solución local del problema de interpolación consiste en resolver  $N$  sistemas lineales de tamaño  $\sigma \times \sigma$ .

### 4 Experimentación computacional

En esta sección se aplica el método de preconditionamiento con y sin nodos especiales descrito en la sección 3 para resolver la ecuación de Poisson con condición de frontera de Dirichlet en el cuadrado unitario  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  [3]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= f(x, y), & (x, y) \in \text{int}(\Omega) \\ p(x, y) &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{7\pi^2}{12} \left( \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \cos\left(\frac{7\pi x}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi y}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{15\pi^2}{8} \left( \cos\left(\frac{3\pi y}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi y}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \sin\left(\frac{7\pi x}{4}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{751\pi^2}{144} \left( \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \sin\left(\frac{7\pi x}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi y}{4}\right) \right) \right), \end{aligned}$$

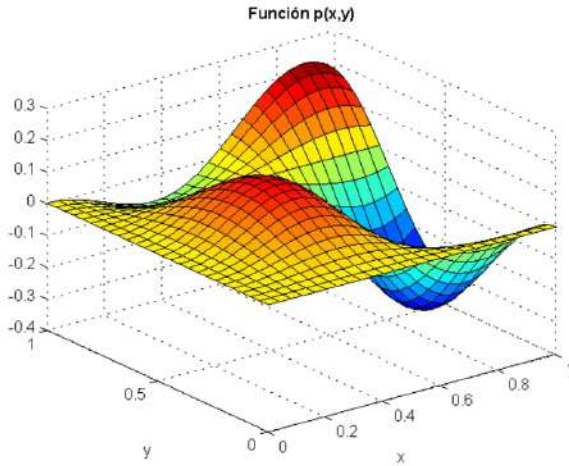
$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ A \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{6} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi x}{4} \right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ B \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi y}{4} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi y}{4} \right) & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

$$A = \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{4} \right) \text{ y } B = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{4} \right).$$

La solución exacta de (6) está dada por

$$p(x, y) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{6} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi x}{4} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi y}{4} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi y}{4} \right), \quad (7)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.

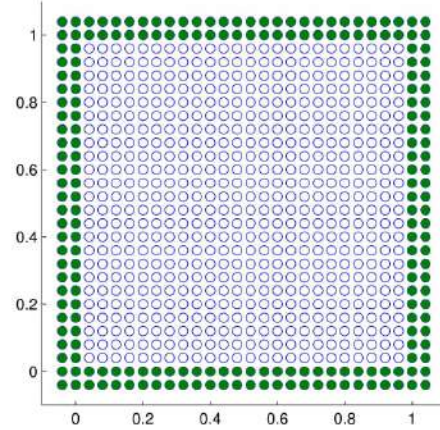


**Figura 2:** Gráfica de  $p(x, y)$  descrita en (7).

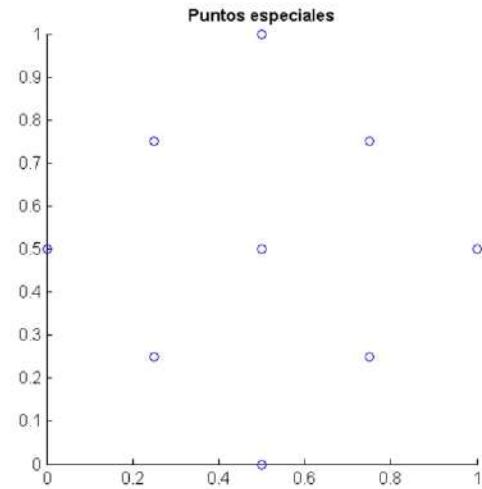
La solución numérica de (6) se realizó usando funciones multicuádricas con un parámetro de forma constante  $c = 1/\sqrt{N}$  con una malla uniforme de  $N = n \times n$  nodos,  $n = 28$ , y un número variable de nodos en la localidad. En la figura 3 se muestra la distribución de puntos que se usaron y que fueron generados con  $\Delta x = \Delta y = 0.04$ . Los nodos llenos representan los nodos en dos capas de la frontera con el fin de disminuir el error de interpolación (Shu et al. 2003 [13]) y los nodos restantes corresponden a los del interior del dominio  $\Omega$ .

El conjunto de nodos especiales consta de 9 nodos pertenecientes a la distribución de nodos  $X$  que se encuentran respectivamente más cercanos a los 9 puntos representados en la figura 4, éste conjunto de puntos se encuentra en  $\Omega$  y están dados por:

$$\text{conj} = \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left( \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right), \left( \frac{1}{2}, 0 \right), \left( 0, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{2}, 1 \right), \left( 1, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$



**Figura 3:** Distribución de nodos que se usaron para la solución numérica de (6).



**Figura 4:** Puntos de  $\Omega$  que determinan los puntos especiales que se usaron para la solución numérica de (6).

La ventaja de tomar el conjunto de puntos especiales dentro de la distribución de nodos  $X$  consiste en que no hay que realizar ningún procedimiento extra para asegurarse que la distribución de nodos no presenta singularidades al tener nodos repetidos o muy cercanos entre sí. En caso de usar todos los nodos del dominio, la matriz  $W$  será la inversa de la matriz  $A$ , y en caso de usar un número  $N$  de nodos en el dominio local de soporte se obtienen resultados como los que se muestran en la tabla 1.

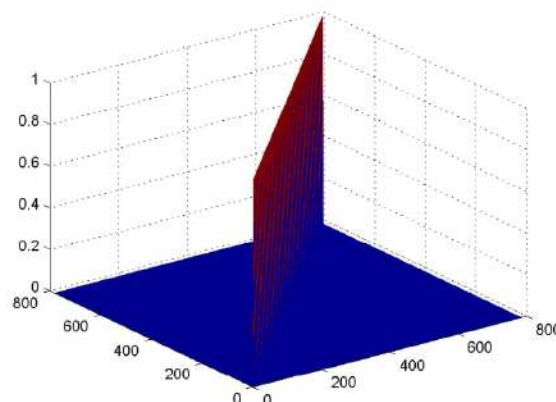
**Tabla 1:** Comparativo entre el uso de nodos especiales y sin usar nodos especiales.

Resultados usando nodos especiales				
$\sigma$	Error máximo en $p(x, y)$	Norma infinito del error en $p(x, y)$	Error máximo en $WA = I$	Norma infinito del error en $WA = I$
13	1.4162	23.1928	1.00220	32.7982
25	0.61372	11.7524	1.00610	20.4337
49	0.66460	12.1553	0.99967	28.2476
98	0.76427	16.5492	0.99629	37.7214
196	0.55833	10.2999	0.99853	39.3210
392	0.98594	17.0185	0.99562	27.3561
Resultados sin el uso de nodos especiales				
$\sigma + 9$	Error máximo en $p(x, y)$	Norma infinito del error en $p(x, y)$	Error máximo en $WA = I$	Norma infinito del error en $WA = I$
13 + 9	5.476	124.0284	12.1347	4899.6121
25 + 9	16.7743	331.9071	8.5985	3509.9313
49 + 9	8.3875	145.6135	6.2661	2441.6879
98 + 9	1.4845	18.3084	4.2735	1608.8968
196 + 9	2.1065	38.1933	3.0168	1016.2169
392 + 9	0.12616	1.2008	0.98685	254.334

Con el objetivo de realizar una comparación justa entre los dos métodos (precondicionamiento con y sin el uso de nodos especiales) se aumentó la cantidad de nodos en el esquema local, para compensar la introducción de los nodos especiales, de tal forma que en ambos casos se use la misma cantidad de nodos (tabla 1). La comparación entre los dos métodos se realizó midiendo el error máximo y la norma infinita del error en la aproximación de la función  $p$  y en la aproximación de la inversa de  $A$ . En este caso se usó también  $\Delta x = \Delta y = 0.04$ , obteniendo un total de 784 nodos, de los cuales 208 corresponden a la frontera de  $\Omega$  y 576 al interior de  $\Omega$ .

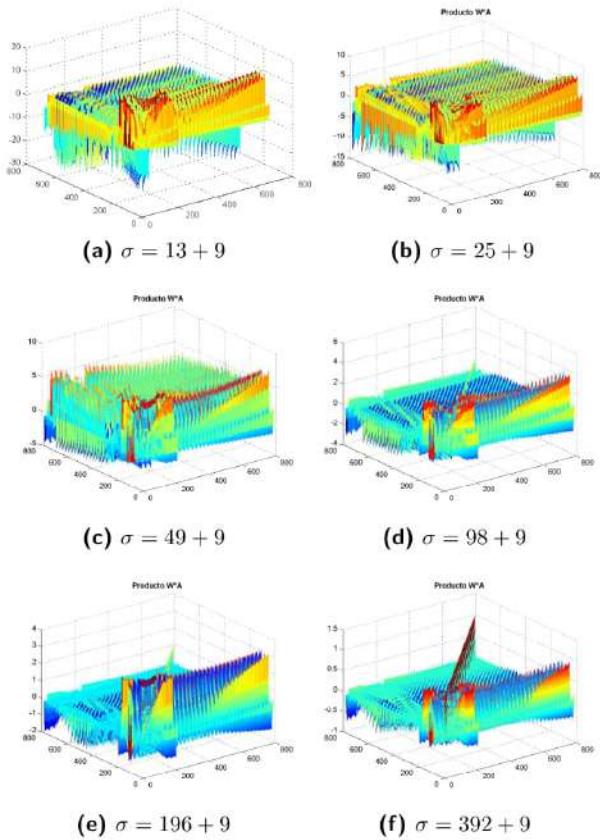
La exactitud de la aproximación de la inversa de  $A$  se midió con la norma infinita de la diferencia entre el producto  $WA$  y la identidad, ésta última se representa gráficamente en la figura 5. Las FBR tienen la característica de mostrar mayor error en las fronteras del dominio, esto puede apreciarse claramente en las figuras 7 y 8, en donde se representa en cada caso el producto  $WA$ . Debido al reordenamiento efectuado para llegar a la expresión (2) y (3), los nodos de la frontera se encuentran en los primeras 192 posiciones, por lo que es ahí donde se encuentra un mayor error. En las figuras 9 y 10, se muestra el error de aproximación a  $p(x, y)$  por cada uno de

los métodos de preconditionamiento local con y sin nodos especiales.



**Figura 5:** Representación del producto  $A^{-1}A = I$ , mediante la gráfica de  $f(x, y) = 1$  si  $x = y$  y  $f(x, y) = 0$  si  $x \neq y$  para todo nodo  $(x, y) \in \Omega$ .

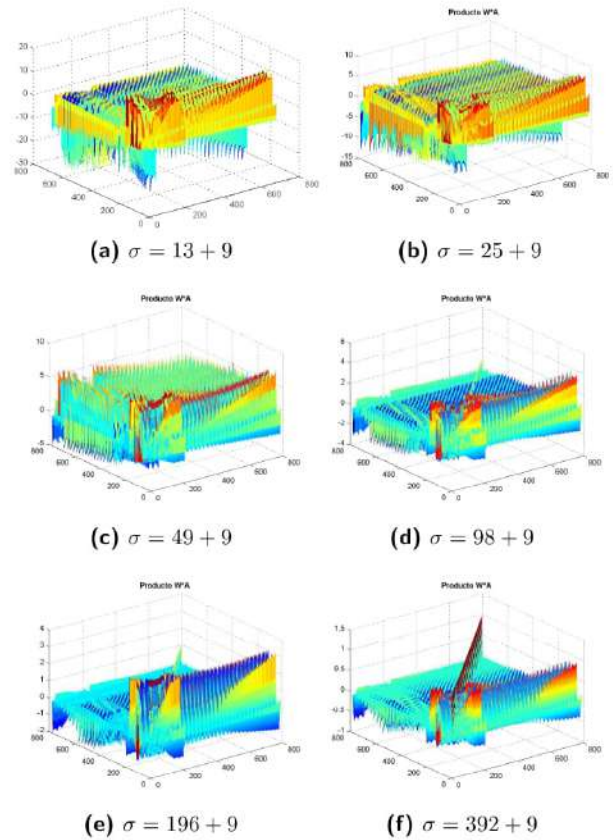
Otra comparación que se realiza es entre el método de preconditionamiento local con nodos especiales descrito en este trabajo para estimar  $A^{-1}$  con el método del cálculo de la pseudoinversa de Moore Penrose. Se encuentra que el método de preconditionamiento es una alternativa computacionalmente menos costosa, esto se observa en la figura 11, en donde se muestra el



**Figura 6:** Aproximación de  $A^{-1}$  por  $W$  mediante el esquema local (sin nodos especiales). En cada caso, se representa el producto  $WA$  mediante la gráfica de  $f(x_i, y_j) = W_i \cdot A_j$  para el nodo  $(x_i, y_j) \in \Omega$ , donde  $W_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $W$  y  $A_j$  es la  $j$ -ésima columna de  $A$ . Se observa en cada caso que la aproximación de  $A^{-1}$  por  $W$  no es buena, las representaciones de  $WA$  no se parecen a la representación de la matriz identidad  $I$  dada en la figura 5.

número de megaflops necesarios para la aplicación de cada método cuando se aproxima  $A^{-1}$  para varias distribuciones nodales en las que tiene un tamaño de paso dado por  $\Delta x = \Delta y = 10^{-k}$  y un total de nodos  $N = (10^k + 1)^2$  y  $\sigma = \lceil N/16 \rceil^1$ .

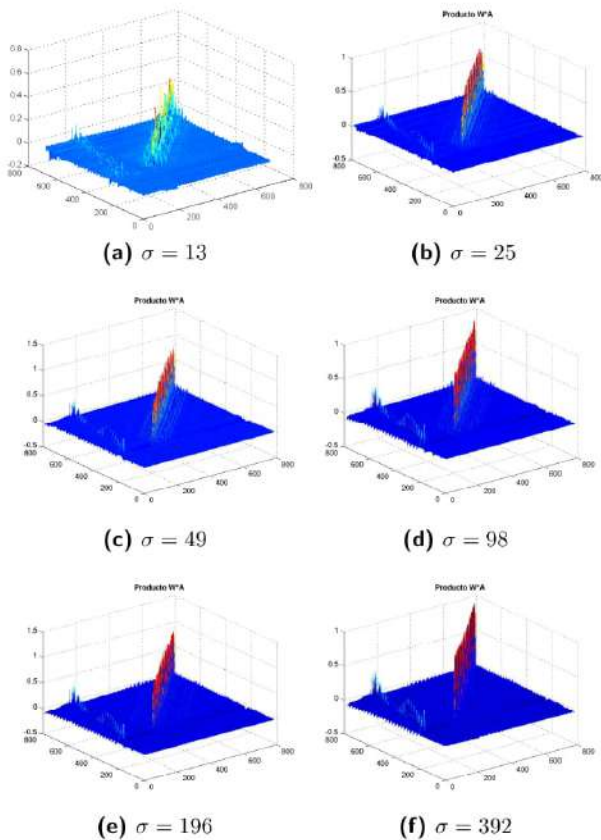
<sup>1</sup>En esta comparación no se tomó en cuenta las operaciones necesarias para construir la matriz de distancias entre los centros, ni tampoco para determinar los nodos en cada localidad.



**Figura 7:** Aproximación de  $A^{-1}$  por  $W$  mediante el esquema local (sin nodos especiales). En cada caso, se representa el producto  $WA$  mediante la gráfica de  $f(x_i, y_j) = W_i \cdot A_j$  para el nodo  $(x_i, y_j) \in \Omega$ , donde  $W_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $W$  y  $A_j$  es la  $j$ -ésima columna de  $A$ . Se observa en cada caso que la aproximación de  $A^{-1}$  por  $W$  no es buena, las representaciones de  $WA$  no se parecen a la representación de la matriz identidad  $I$  dada en la figura 5.

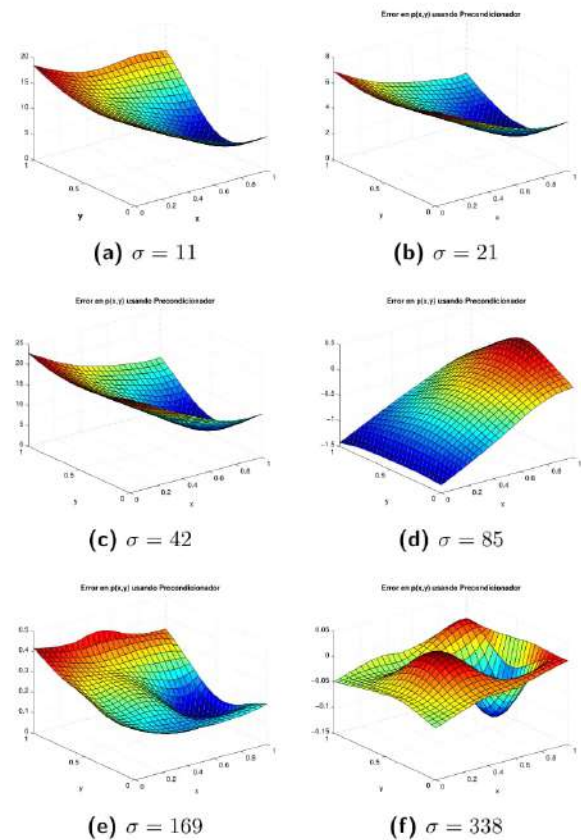
## 5 Conclusiones

En este artículo se presentó un esquema de colocación asimétrico aplicado para resolver numéricamente la ecuación de Poisson, asumiendo que la solución puede describirse mediante una combinación lineal de funciones de base radial, en donde se tomó la construcción de un preconditionador como estrategia para aminorar los problemas relacionados con el mal condicionamiento del sistema asociado.



**Figura 8:** Aproximación de  $A^{-1}$  por  $W$  mediante el esquema local complementado con la introducción de nodos especiales. También en cada caso, se representa el producto  $WA$  mediante la gráfica de  $f(x_i, y_j) = W_i \cdot A_j$  para el nodo  $(x_i, y_j) \in \Omega$ , donde  $W_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $W$  y  $A_j$  es la  $j$ -ésima columna de  $A$ . A diferencia de las aproximaciones mostradas en la figura 7, en este caso las aproximaciones de  $A^{-1}$  por  $W$  son muy buenas, pues se nota que las representaciones de  $WA$  se parecen mucho más a la representación de la matriz identidad  $I$  dada en la figura 5.

Se construyó un preconditionador basado en un esquema local de aproximación de una función cardinal, el cual mostró resultados muy pobres cuando se usaron pocos nodos en el dominio de soporte de cada nodo, lo cual pudo mejorarse mediante la introducción de un conjunto de nodos especiales distribuidos en el dominio. Esta estrategia mostró excelentes resultados, lo cual coincide con experimentos reportados por otros



**Figura 9:** Error de aproximación a  $p(x, y)$  usando preconditionamiento sin la introducción de nodos especiales.

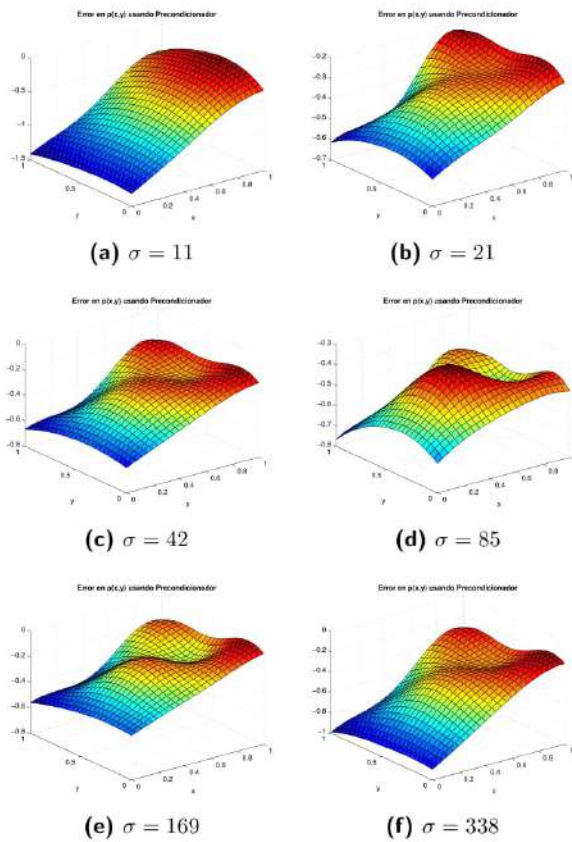
investigadores.

Además de permitir hacerse cargo del mal condicionamiento del sistema asociado, este método reduce considerablemente el esfuerzo computacional necesario para resolver el sistema asociado a la solución numérica de una EDP, lo que convierte a este método en una excelente alternativa a los métodos convencionales.

## Referencias

- [1] B.J.C. Baxter. Preconditioned Conjugate Gradients, Radial Basis Functions, and Toeplitz Matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3/5):305–318, 2002.
- [2] R.K. Beatson, J.B. Cherrie, and C.T. Mouat. Fast Fitting of Radial Basis Fun-

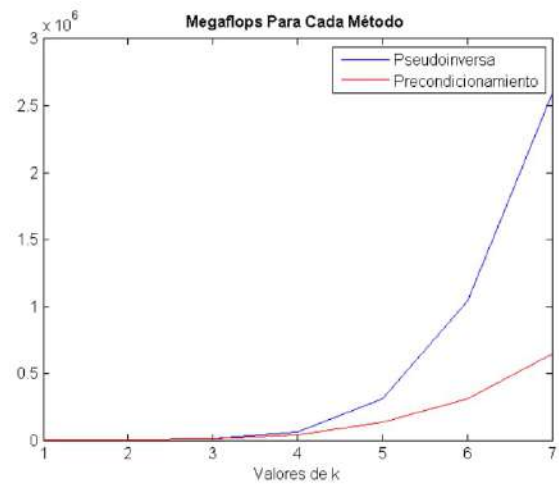




**Figura 10:** Error de aproximación a  $p(x, y)$  usando preconditionamiento con la introducción de nodos especiales.

ctions: Methods Based on Preconditioned GMRES Iteration. *Advances in Computational Mathematics*, 11(2):253–270, 1999.

- [3] D. Brown, L. Ling, E. Kansa, and J. Levesley. On Approximate Cardinal Preconditioning Methods for Solving PDEs With Radial Basis Functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(4):343–353, 2005.
- [4] M.D. Buhmann. Multivariate Cardinal Interpolation With Radial-Basis Functions. *Constructive Approximation*, 6(3):225–255, 1990.
- [5] B. Fornberg and G. Wright. Stable Computation of Multiquadric Interpolants for All Values of the Shape Parameter. *Computers*



**Figura 11:** Megaflops realizados en la aproximación de  $A^{-1}$  usando pseudoinversa de Moore Penrose y el preconditionamiento usando nodos especiales y  $\sigma = \lceil N/16 \rceil$  nodos en el esquema local.

& *Mathematics with Applications*, 48(5/6): 853–867, 2004.

- [6] Y.C. Hon. A Quasi-Radial Basis Functions Method for American Options Pricing. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3/5):513–524, 2002.
- [7] Y.C. Hon and X.Z. Mao. A Multiquadric Interpolation Method for Solving Initial Value Problems. *Scientific Computing*, 12(1): 51–55, 1997.
- [8] E.J. Kansa. Multiquadrics—A Scattered Data Approximation Scheme With Applications to Computational Fluid-Dynamics—I: Surface Approximations and Partial Derivative Estimates. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8/9):127–145, 1990.
- [9] E.J. Kansa and Y.C. Hon. Circumventing the Ill-Conditioning Problem With Multiquadric Radial Basis Functions: Applications to Elliptic Partial Differential Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(7/8):123–137, 2000.

- [10] J. Li and Y.C. Hon. Domain Decomposition for Radial Basis Meshless Methods. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(3):450–462, 2004.
- [11] L. Ling and E.J. Kansa. A Least-Squares Preconditioner for Radial Basis Functions Collocation Methods. *Advances in Computational Mathematics*, 23(1):31–54, 2005.
- [12] R. Schaback. Error Estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3(3):251–264, 1995.
- [13] C. Shu, H. Ding, and K.S. Yeo. Local Radial Basis Function-Based Differential Quadrature Method and its Application to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:941–954, 2003.

# Lector Agrícola

José A. Polo Lara<sup>1\*</sup>, María V. Suárez Guerra<sup>1</sup>, Anna Alonso Clemente<sup>1</sup>,  
Luis A. Espejo Ponce<sup>1</sup>, Yareny Rivera García<sup>1</sup>, Justino López Hernández<sup>1</sup>

<sup>1</sup>División de Ingeniería Informática, Instituto Tecnológico Superior de Zacapoaxtla

\* jose\_pololara@hotmail.com

## Resumen

El Lector Agrícola es un prototipo que, utilizado en suelos agrícolas, toma muestras de temperatura y humedad para determinar la viabilidad de cultivo de maíz. El prototipo se desarrolló con la instrumentación de sensores integrados a un microcontrolador Arduino, éste obtiene datos que son almacenados en un sistema gestor de base de datos para, posteriormente, ser procesados e interpretados por un sistema de información.

*Palabras clave:* Lector agrícola; Sensores; Arduino; Sistema; Base de Datos.

## 1 Introducción

Desde tiempos remotos los agricultores se disponían a cultivar plantas de maíz en sus tierras sin analizar detenidamente las condiciones del suelo que favorecerían a la obtención de una buena cosecha. Actualmente, se encuentran conscientes de que el suelo es su recurso básico y, como tal, influye en el rendimiento de sus cultivos. En este sentido se hace necesaria la presencia de ciertos factores en la tierra como el pH, la temperatura y la humedad, mismos que deben encontrarse en determinados niveles para garantizar la calidad del suelo y el óptimo crecimiento de las plantas de maíz [2]. Lo mencionado anteriormente da origen al presente proyecto que consiste en el desarrollo de un sistema integral capaz de detectar las características del suelo en el que se realiza la siembra de maíz, mismas que son comparadas con estándares agronómicos a través de un sistema de información que permite a los agricultores conocer el estado de su suelo [1].

## 2 Descripción del problema

La adecuada disponibilidad de factores ambientales asegura un buen desarrollo y crecimiento foliar, entre éstos podemos mencionar la temperatura, humedad y pH, mismos que generalmente limitan la producción de maíz, por tal motivo es necesario conocer los requerimientos de cultivo y las características del suelo para determinar las necesidades de fertilización y poder obtener una buena cosecha. El sector primario es aquel que nos provee la materia prima para producción de alimentos y al ser el maíz, en la Sierra Nororiental de Puebla, uno de los cultivos más importantes de este sector se pensó en el desarrollo de un sistema agrícola capaz de detectar factores como pH, temperatura y humedad del suelo, mismos que son comparados con estándares agronómicos, lo que permite conocer el estado nutricional del mismo. Las mediciones obtenidas con el prototipo desarrollado serán utilizadas por los productores de la región para tomar decisiones relacionadas con trabajos de fertilización, en caso de ser necesario, para poder obtener una buena cosecha [3]. Es impor-

tante conocer que el análisis de suelo se realiza en 4 etapas fundamentales: muestreo del suelo, análisis químico, correlación y calibración de resultados y recomendaciones de fertilización. En la primera etapa se recomienda utilizar un equipo de muestreo que es difícil de conseguir en esta región, además de que las muestras obtenidas deben ser examinadas en un laboratorio, lo que implica una inversión económica considerable, así como disposición de tiempo para poder conocer los resultados de ese análisis [4]. Por lo antes mencionado se hace necesario el desarrollo de un sistema integral que nos ayude a medir con precisión los factores presentes en la tierra que influyen en el desarrollo de la planta de maíz, así como también contar con la mayor cantidad de información posible que nos permita conocer la calidad del suelo y realizar una adecuada toma de decisiones [5].

### 3 Metodología de solución

En el Lector Agrícola se utilizó una plataforma de desarrollo para la programación del microcontrolador empleado, un Arduino uno, y así poder obtener información de los sensores que nos ayudaron a detectar la cantidad de temperatura, humedad y pH de la tierra, elementos necesarios para el cultivo de maíz.

Los sensores utilizados fueron LM35, que es un sensor de temperatura, y YL-38, que es un sensor de humedad. Además, se añadió un botón al sistema electrónico para que al oprimirlo realice el almacenamiento de registros emitiendo un sonido con esta acción.

Como primera actividad se diseñó un diagrama de bloques con el que se identifican los elementos que integran al sistema, mismo que se representa en la figura 1.

La siguiente actividad consistió en el diseño del circuito para el Lector Agrícola, utilizando la herramienta fritzing, como se muestra en la figura 2.

Con base en el diseño anterior se generó la primera versión de prototipo funcional, que es el encargado de obtener datos del suelo relaciona-



Figura 1: Diagrama de bloques.

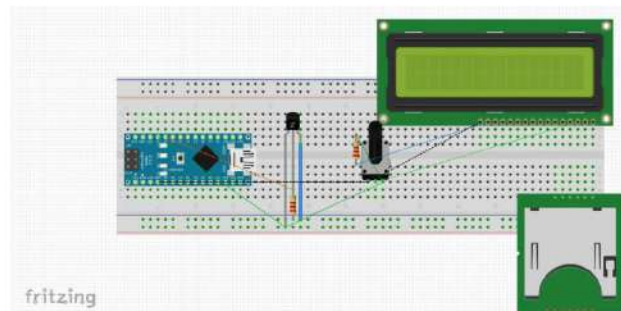


Figura 2: Diseño del circuito para el Lector Agrícola.

dos con temperatura y humedad, para su procesamiento posterior en un sistema de información, como se muestra en la figura 3. Se añadió



Figura 3: Primera versión del prototipo.

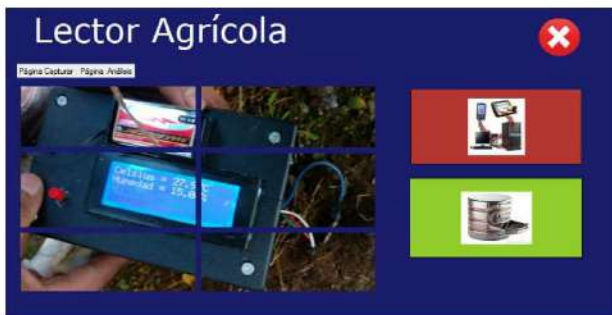
un botón al sistema electrónico del primer prototipo que, al oprimirlo, realiza el almacenamiento de datos, emitiendo un sonido con esta acción, también se utilizó una caja para almacenar los circuitos electrónicos utilizados, obteniendo así la segunda versión del prototipo que se muestra en la figura 4.

Para el alojamiento de la información obtenida con el prototipo se desarrolló una aplicación interconectada con una Base de datos, utilizan-



**Figura 4:** Segunda versión del prototipo.

do las herramientas de Visual Studio, ADO.NET para conexión de la aplicación con la Base de Datos, SQL Server como manejador de bases de datos y Cristal Reports para la generación de reportes. La interfaz del sistema se muestra en la figura 5.

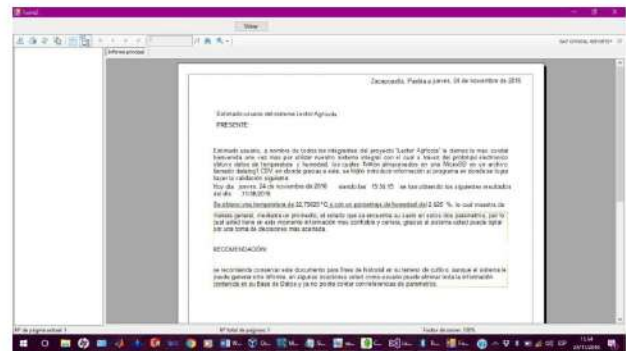


**Figura 5:** Interfaz del sistema.

La aplicación genera un promedio de temperatura y humedad para una muestra de datos, especificada mediante un cuadro de texto, y genera un reporte con esa información, éste se muestra en la figura 6.

## 4 Resultados

Como resultado de esta investigación se desarrolló un prototipo que obtiene, mediante sensores, los niveles de temperatura y humedad del suelo, así como también un sistema de información programado en Visual Basic, que utiliza SQL server como Gestor de Base de Datos, para



**Figura 6:** Interfaz del sistema.

almacenar y procesar los datos obtenidos con el Lector Agrícola. El sistema desarrollado realiza las siguientes funciones:

- Extraer datos de un archivo CSV contenido en la memoria MicroSD del prototipo.
- Exportar la información obtenida, anexando la fecha y hora de registro, a una base de datos desarrollada en SQL Server.
- Obtención de promedios para temperatura y humedad, de una muestra determinada mediante la interfaz del sistema, para ser mostrados en un reporte.

## 5 Conclusiones

Podemos concluir que los datos obtenidos mediante el prototipo desarrollado, relacionados con la temperatura y humedad del suelo, se almacenan en una memoria micro SD en un archivo de tipo CSV, mismo que es exportado y procesado en un sistema gestor de base de datos. Lo anterior hizo posible el desarrollo de un sistema computacional mediante el cual se promedian las muestras obtenidas en una determinada área de cultivo, con esa información se genera un reporte de resultados a través del cual se da a conocer el nivel de humedad y temperatura del suelo analizado. Con base en esa información los agricultores tendrán la posibilidad de tomar decisiones acertadas que favorezcan sus cultivos. Como trabajo futuro se pretende crear una aplicación web

con la que el usuario podrá enviar, de manera remota, la información obtenida por el prototipo, así como también el desarrollo de una aplicación móvil. Además, se realizará la instrumentación del sensor de pH en el prototipo para tener un estado de resultados más completo, así como la instrumentación del módulo RTC para obtener fecha y hora del muestreo en tiempo real.

## Referencias

- [1] Maíz — irritec sistemas de riego. <http://www.irritec.com/es/soluciones/agricultura/maiz/>, 2016.
- [2] Vicenç Fernández Alarcón. *Desarrollo de sistemas de información: una metodología basada en el modelado*, volume 120. Univ. Politèc. de Catalunya, 2006.
- [3] Dave Evans. Internet de las cosas. 2011.
- [4] Agencia Notimex. Estudiante de puebla desarrolla tecnología para sector agrícola. <http://informaciontotal.com.mx/2016-09-22-ed399995/estudiante-de-puebla-desarrolla-tecnologia-para-sector-agricola/>, 2016.
- [5] Jr. Raymond MCLeod. *Sistemas de información gerencial*. Addison-wesley, 2000.

# Modelado de islas de calor urbanas usando diferencias finitas generalizadas en mallas estructuradas

G. Sánchez,<sup>1\*</sup> D. Santana,<sup>1</sup> F.J. Domínguez,<sup>1</sup> M.L. Ruiz,<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

\* saphira3000@hotmail.es

## Resumen

En este trabajo planteamos un esquema en diferencias finitas generalizadas en mallas estructuradas no rectangulares con dominios con secciones transversales planas, para calcular la solución numérica de la ecuación de difusión-advección en 2 dimensiones, el cual modela la concentración de contaminantes en capas horizontales adyacentes al nivel del suelo. Mostramos el desempeño del método con un breve estudio de la dispersión de contaminantes bajo el efecto de islas de calor urbanas en la ciudad de Morelia, asumiendo que los contaminantes son emitidos del suelo en zonas definidas a una tasa constante.

*Palabras clave:* Diferencias finitas generalizadas; Isla de calor urbana; Ecuación de difusión-advección; Mallas estructuradas no rectangulares.

## 1 Introducción

Con el paso del tiempo, el hombre ha modificado y adaptado el medio ambiente a sus necesidades; el desarrollo industrial, el crecimiento demográfico, entre otros, han tenido un efecto profundamente negativo sobre el ambiente, lo que ha llevado a que en la actualidad la contaminación sea un problema de gran impacto.

Por esto es necesario estudiar los fenómenos que contribuyen a agravar el problema, de manera que se puedan plantear acciones para disminuir los efectos negativos que éstos tienen.

## 2 Descripción del problema

En los últimos años, en la zona metropolitana del valle de Morelia, la mancha urbana ha ido en aumento lo que ha traído consigo consecuencias

para el ambiente, principalmente la contaminación del aire por el uso excesivo de vehículos.

Una vez que son emitidos, los contaminantes se transportan a causa de diversos procesos, lo que ocasiona que incremente la zona afectada. Es por eso que es importante estudiar la dispersión de los mismos.

En el presente trabajo se estudia la dispersión de contaminantes bajo el efecto de islas de calor urbanas.

## 3 Modelo matemático

La ecuación de difusión-advección estacionaria, que modela la concentración de contaminantes, está dada por

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + R, \quad (1)$$

donde  $C$  representa la concentración del contaminante,  $u, v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad del viento en los ejes  $x, y, z$  respectivamente;  $K_x, K_y$  y  $K_z$  los correspondientes coeficientes de difusividad; y  $R$  es un término de creación, destrucción, remoción o eliminación.

Asumiendo homogeneidad del terreno, la concentración es considerada constante a lo largo del eje  $y$ . Más aún, asumiendo que la difusión es muy pequeña comparada con la advección en el eje  $x$ , la ecuación (1) resulta en

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + R. \quad (2)$$

Tomando en cuenta mecanismos de remoción y dado que el viento mesoescala es elegido para representar el viento local ocasionado por la isla de calor, reescribimos la ecuación (2) en la forma

$$(u + u_e) \frac{\partial C}{\partial x} + w_e \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \lambda C,$$

donde  $u_e$  y  $w_e$  son las componentes del viento mesoescala en la dirección  $x$  y  $z$  respectivamente,  $\lambda$  es un parámetro que define la pérdida de un contaminante por unidad de tiempo y  $K_z$  está dada por una ley de potencias, de modo que la ecuación anterior se transforma en

$$K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - (u + u_e) \frac{\partial C}{\partial x} + \left( \frac{\partial K_z}{\partial z} - w_e \right) \frac{\partial C}{\partial z} - \lambda C = 0. \quad (3)$$

## 4 Metodología de solución

Consideremos el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Cu_{zz} + Du_x + Eu_z + Fu,$$

donde  $C, D, E$  y  $F$  son funciones. El problema de interés es la construcción de esquemas en diferencias finitas para una malla no rectangular, sobre el dominio de  $L$ .

El esquema en diferencias finitas [3] se obtiene considerando un conjunto finito de nodos

$p_0, p_1, \dots, p_q$  para el cual necesitamos encontrar los coeficientes  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_q$ , de modo que

$$\hat{L}(p_0) = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \dots + \Gamma_q u(p_q).$$

El esquema es consistente si

$$[Lu]_{p_0} - \hat{L}(p_0) \rightarrow 0$$

mientras  $p_1, \dots, p_q \rightarrow p_0$ .

La expansión de la expresión anterior, usando  $q = 8$  puntos, alrededor de  $p_0$  está dada por

$$\begin{aligned} [Lu]_{p_0} - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i u(p_i) = & \left( F(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i \right) u(p_0) + \\ & \left( D(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i \Delta x_i \right) u_x(p_0) + \\ & \left( E(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i \Delta z_i \right) u_z(p_0) + \\ & \left( C(p_0) - \sum_{i=0}^8 \frac{\Gamma_i (\Delta z_i)^2}{2} \right) u_{zz}(p_0) + \\ & \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta z_i\}^3). \end{aligned}$$

Esto define de manera natural un sistema de 6 ecuaciones y 9 incógnitas

$$M\Gamma = \beta \quad (4)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\ 0 & \Delta z_1 & \dots & \Delta z_8 \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta z_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta z_8 \\ 0 & (\Delta z_1)^2 & \dots & (\Delta z_8)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_8 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}.$$

Encontramos una solución para el sistema reducido

$$\tilde{M}\tilde{\Gamma} = \tilde{\beta} \quad (5)$$



donde

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\ \Delta z_1 & \dots & \Delta z_8 \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\ \Delta x_1 \Delta z_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta z_8 \\ (\Delta z_1)^2 & \dots & (\Delta z_8)^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_8 \end{pmatrix}, \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 2C(p_0) \end{pmatrix},$$

y usamos la primera ecuación del sistema definido por (4) para determinar  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = F(p_0) - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_8.$$

## 5 Experimentación computacional

Se utilizan las funciones  $u$ ,  $K_z$  propuestas por [4] y  $u_e$ ,  $w_e$  por [2].

$$\begin{aligned} u &= u_r \left( \frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \\ u_e &= ax \left( \frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \\ w_e &= \frac{az}{\alpha + 1} \left( \frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \\ K_z &= K_r \left( \frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \end{aligned}$$

donde  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $u_r$ ,  $z_r$  y  $K_r$  son constantes.

Con los coeficientes de la ecuación (3) en los nodos interiores de una submalla estructurada de  $3 \times 3$ , el lado derecho de (5) está dado por

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} -(u + u_e)(p_0) \\ \frac{\partial K_z}{\partial z} - w_e(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 2K_z(p_0) \end{pmatrix}.$$

A la altura de la capa de mezcla y al nivel del suelo, el valor de  $K_z \frac{\partial C}{\partial z}$  está dado por

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad z = H, x > 0,$$

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = \begin{cases} v_d C - Q & z = 0, 0 \leq x \leq l_1 \\ v_d C & z = 0, l_1 < x \leq L \end{cases},$$

donde  $v_d$  es la velocidad de deposición.

Las condiciones de Neuman se discretizan considerando 5 nodos vecinos a un nodo de frontera de manera análoga a lo descrito anteriormente.

En las fronteras verticales tenemos

$$C(0, z) = C_0, \quad C(L, z) = 0.$$

Los parámetros usados en la modelación son

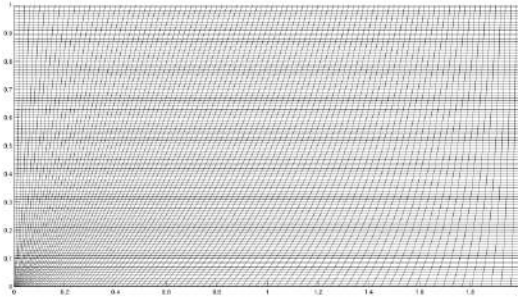
$$\alpha = \begin{cases} 0.17 & (\text{inestable}) \\ 0.27 & (\text{neutral}) \\ 0.61 & (\text{estable}) \end{cases},$$

$$\begin{aligned} a &= 0.002s^{-1}, \\ \lambda &= 4 \times 10^{-5}s^{-1}, \\ u_r &= 2.1m/s, \\ z_r &= 10m, \\ K_r &= 0.84m/s, \\ Q &= 1\mu m^{-2}s^{-1}, \\ v_d &= 0.006m/s, \end{aligned}$$

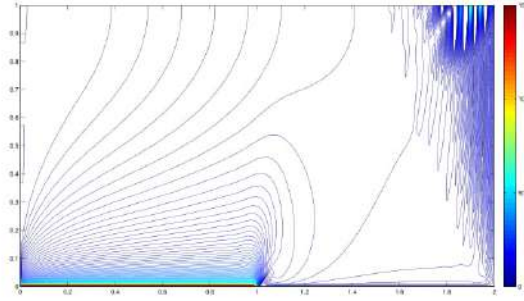
los cuales fueron tomados del artículo [1], debido a la semejanza que existe entre la región de estudio y la discutida en dicho trabajo.

La discretización propuesta se aplicó en una malla estructurada para la zona de prueba, de 101 puntos por lado; la cual fue generada usando el generador elíptico de Winslow [5], considerando un rectángulo escalado de 1000 metros en el eje horizontal ( $x$ ) y 200 metros en el eje vertical ( $z$ ).

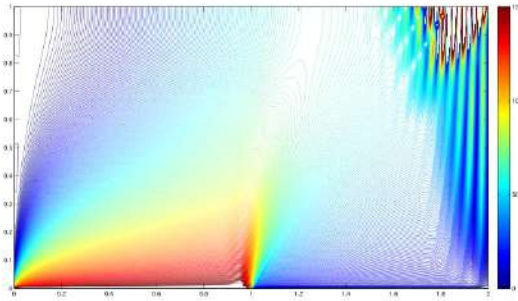
La distribución de nodos al nivel del suelo es cuadrática, de manera que sea más densa en el área de emisión, tal como se muestra en la figura 1. La dispersión de contaminantes estimada, correspondiente a las distintas condiciones atmosféricas, se muestra en las figuras 2-4.



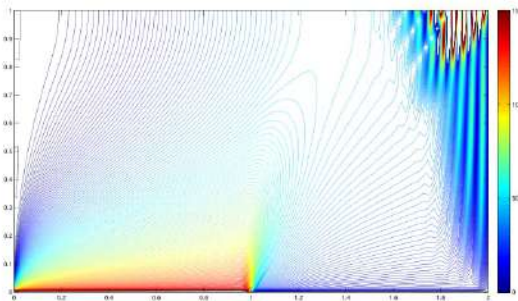
**Figura 1:** Malla usada.



**Figura 4:**  $\alpha = 0.61$ .



**Figura 2:**  $\alpha = 0.17$ .



**Figura 3:**  $\alpha = 0.27$ .

## 6 Conclusiones

Presentamos una aproximación a la solución de la ecuación de difusión-advención estacionaria en 2 dimensiones, la cual modela la dispersión de contaminantes bajo el efecto de islas de calor urbanas, sujeto a tres condiciones atmosféricas (inestable, neutral y estable). Podemos concluir que el sistema planteado describe de manera satisfactoria la dinámica de interés.

Los resultados sugieren que el efecto de las islas de calor favorecen el ascenso de contaminantes, haciendo más densa la capa de mezcla, agravando el problema.

Para obtener mejores resultados, es necesario adaptar las mallas a nuestras condiciones locales y aplicar valores más aproximados en los datos y parámetros requeridos; así como trabajar en un modelo no estacionario.

## Referencias

- [1] M. Agarwal and A. Tandon. Modeling of the urban heat island in the form of mesoscale wind and of its effect on air pollution dispersal. *Applied Mathematical Modelling*, 34:2520–2530, 2010.
- [2] J.F. Dillely and K.T. Yen. Effect of a mesoscale type wind on the pollutant distribution from a line source. *Atmos. Environ.*, 6:843–851, 1971.
- [3] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, 2007.
- [4] J.S. Lin and L.M. Hildemann. Analytical solutions of the atmospheric diffusion equation with multiple sources and height dependent wind speed and eddy diffusivities. *Atmos. Environ.*, 30:239–254, 1996.
- [5] Joe. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill. *Handbook of Grid Generation*. CRC Press, 1998.

# Modulación no-ortogonal mediante los modelos Legendre-Fourier y Taylor-Fourier

V. A. Trejo Rocha,<sup>1\*</sup> J. A. de la O Serna<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Posgrado en Ingeniería Eléctrica, FIME UANL

\* vidal.trejorc@gmail.com

## Resumen

Las bases de expansión ortogonales son ampliamente utilizadas tanto en los algoritmos de procesamiento digital de señales (DSP) como en el MODulador-DEModulador (MODEM) de los sistemas de comunicaciones digitales. En el presente trabajo se explora desempeño de un par de esquemas de modulación no-ortogonal Legendre-Fourier (LF) y Taylor Fourier (TF) y se evalúa su razón de error binaria (BER) en un canal de ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN).

*Palabras clave:* Bases no-ortogonales; Legendre-Fourier; Modulación no-ortogonal.

## 1 Introducción

El objetivo fundamental de los sistemas de comunicaciones es transmitir y recibir información de un lugar a otro a través de un medio analógico llamado *canal*. Para esto, el *modulador* sustituye la información binaria por un conjunto finito de señales que son propagadas en el canal, el cual las distorsiona y les agrega interferencia y ruido. El *demodulador* realiza la operación inversa estimando la información binaria de la señal recibida.

Los formatos de *modulación digitales lineales*, como los esquemas QAM y PSK utilizan un conjunto de señales ortonormales  $\phi_j(t)$  para el mapeo entre la cadena binaria  $I$  y las señales  $s(t)$ , como se ilustra en la fig. 1. La síntesis de señales se realiza mediante la combinación lineal

$$s(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(t) \quad t \in I; \quad (1)$$

donde cada  $\alpha_j$  pertenece a un conjunto finito de amplitudes. El mapeo entre los bits y las amplitudes se realiza con un *codificador*. En caso de

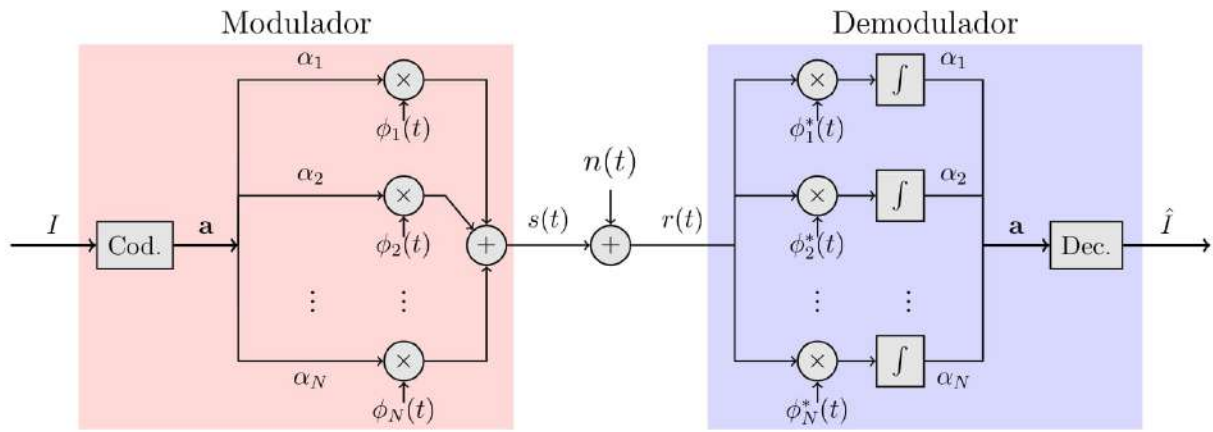
una distorsión nula i.e  $r(t) = s(t)$ , la estimación de los coeficientes se realiza en el demodulador con el producto punto

$$\alpha_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle \quad 1 \leq j \leq N; \quad (2)$$

El esquema de Multiplexación por División de Frecuencias Ortogonales (OFDM) es un ejemplo notable del anterior patrón de diseño. OFDM usa la base de Fourier de la forma  $\phi_m(t) = e^{j2\pi m f_1 t}$  ortogonal en el intervalo  $T = \frac{1}{f_1}$ , lo que permite utilizar métodos de Transformada Digital de Fourier (DFT) para implementar su modem [1].

De manera similar, en muchos algoritmos DSF las bases de descomposición ortogonales son preferidas sobre las no-ortogonales por la facilidad del cálculo de los coeficientes de expansión con productos punto. Ejemplos pueden ser encontrados en las bases de las transformadas DFT, DWT y en el proceso de ortogonalización Gram-Schmidt.

Sin embargo, desde el punto de vista algebraico la independencia lineal es la condición necesaria para una representación unívoca en un espacio vectorial. En el caso no ortogonal y linealmente



**Figura 1:** Diagrama Modem digital lineal.

independiente (LI), los coeficientes son estimados mediante el uso de conjunto *biortogonal* [2] al conjunto LI. Tal conjunto es obtenido de manera numérica mediante mínimos cuadrados tomando los renglones de la matriz pseudoinversa [3], y en casos matemáticamente tratables con el cálculo analítico de su forma cerrada [4].

En el contexto de los sistemas de comunicaciones han sido propuestas alternativas no-ortogonales de OFDM para reducir el efecto de la distorsión en canales de 2 rayos [5] y doblemente dispersivos [6].

## 2 Modelos de señal LF y TF

### 2.1. Tiempo continuo

Basado en el modelo de señal en [7], la señal *equivalente bandabase compleja* [8] es generada mediante la suma del producto cartesiano de  $M$  funciones de armónicas y  $K$  polinomios y se expresa como

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_{m,k} \phi_{m,k}(t) \quad -1 \leq t < 1. \quad (3)$$

donde  $\alpha_{m,k} \in \mathbb{C}$  es la amplitud compleja de la armónica  $m$  y el polinomio  $k$  y  $\phi_{m,k}(t)$  es el elemento base tomado del modelo LF ó TF. Los elementos ambos modelos son mostrados en la tabla 1.

TF	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} t^k e^{j2\pi m f_1 t} \quad -1 \leq t < 1$
LF	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} l_k(t) e^{j2\pi m f_1 t} \quad -1 \leq t < 1$

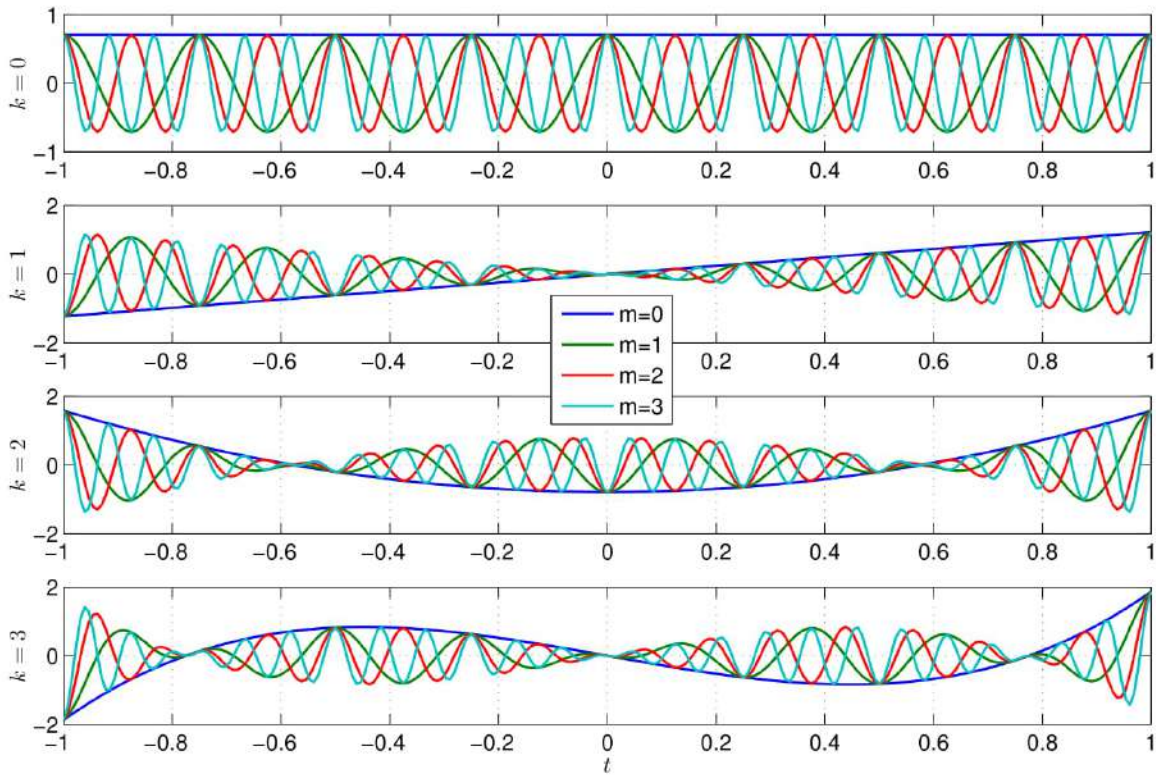
**Tabla 1:** Elementos de la base de expansión  $\phi_{m,k}$  en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

El par de bases difieren sólo por el termino multiplicativo Taylor ó Legendre. En ambos casos  $\varepsilon_k$  es un factor de normalización y la primera frecuencia armónica es elegida como un múltiplo entero del recíproco del intervalo temporal  $[-1, 1]$  como  $f_1 = P \frac{1}{2}$ . De esta manera se tienen tres variables de diseño  $M$ ,  $K$  y  $P$ . Las señales base LF, mostradas en la fig. 2, se caracterizan por que los términos Legendre definen una envolvente para el grupo de armónicas. Lo anterior ocurre también con la base TF.

Las bases TF y LF son no-ortogonales dado que el producto punto entre un par de sus elementos

$$\langle \phi_{m_1, k_1}, \phi_{m_2, k_2} \rangle = \int_{-1}^1 p_{k_1}(t) p_{k_2}(t) e^{-j2\pi f_1 (\Delta m) t} dt, \quad (4)$$

donde  $p_k(t)$  corresponde al término Taylor o Polinomio de Legendre de orden  $k$  y  $\Delta m = m_2 - m_1$  la diferencia armónica, es distinto a cero cuando  $m_1 \neq m_2$  y  $k_1 \neq k_2$  si el número de polinomios incluidos es mayor a uno ( $K > 1$ ).



**Figura 2:** Señales base (parte real) del modelo LF.  $M = 4$ ,  $K = 4$  y  $P = 8$

## 2.2. Tiempo discreto e implementación matricial

Aplicando una frecuencia de muestreo como múltiplo entero  $Q$  de la primera portadora  $f_s = Qf_1$ , las bases discretizadas se expresan como en la tabla 2 con  $N = PQ$  muestras. El factor  $\frac{2}{N}$  cumple la función de normalización en tiempo discreto.

TF	$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_k N}} \left(\frac{2}{N}n\right)^k e^{j\frac{2\pi}{Q}mn}$
LF	$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_k N}} l_k \left(\frac{2}{N}n\right) e^{j\frac{2\pi}{Q}mn}$

**Tabla 2:** Elementos de la base de expansión  $\phi_{m,k}$  en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Organizando las muestras de los elementos base en las columnas de una matriz  $\Phi \in \mathcal{M}^{N \times MK}$  y de manera similar las amplitudes  $\alpha_{m,k}$  en el vector columna  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{MK}$  la ec. 1 es expresada como

$$\mathbf{s} = \Phi \mathbf{a} \quad (5)$$

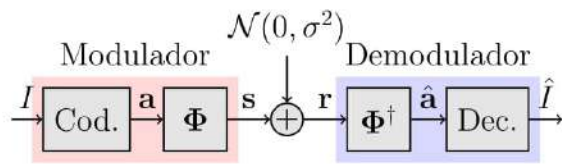
donde  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$  son las muestras de la señal generada. La estimación de los coeficientes de ponderación bajo el criterio de mínimos cuadrados puede ser calculado

$$\hat{\mathbf{a}} = \Phi^\dagger \mathbf{s} \quad (6)$$

donde  $\Phi^\dagger = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi^H$  es la matriz pseudo-inversa izquierda. Las columnas de  $\Phi$  son ortogonales a los renglones de  $\Phi^\dagger$  i.e  $\mathbf{I} = \Phi^\dagger \Phi$ , por lo que los elementos en ambas matrices puede ser asociados a un par de bases *biortogonales*.

## 3 Simulación computacional

Los esquemas LF y TF fueron evaluados considerando un modelo de canal AWGN, el cuál agrega muestras de un proceso de ruido blanco de media nula y varianza  $\sigma^2$ , con respuesta a la frecuencia ideal plana y no limitada en banda, además de sincronía entre transmisor y receptor. No son consideradas las distorsiones lineales y no



**Figura 3:** Diagrama de simulación de los esquemas propuestos en condiciones de canal AWGN.

lineales ocasionadas por las etapas de filtrado, translación frecuencial y amplificación.

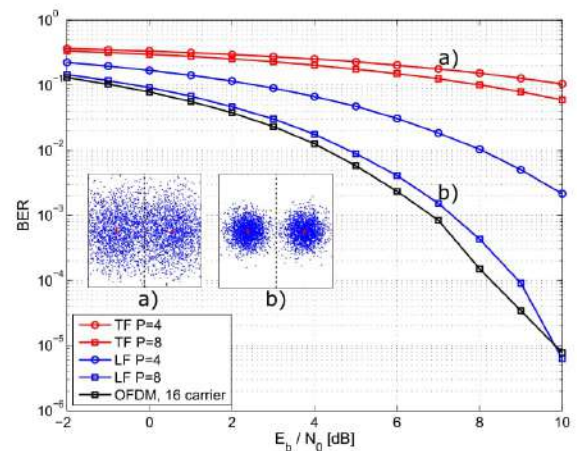
Tomando como referencia la fig.3, son utilizados codificadores BPSK, que utilizan la correspondencia  $-1$  si el bit entante es 0 y 1 si es un 1. Para emular la salida del codificador a una secuencia binaria equiprobable, son generados vectores columna  $\mathbf{a}$  cuyos elementos  $\alpha_j$  son variables aleatorias que toman los valores  $\{-1, 1\}$  de manera equiprobable. De manera similar, para estimar la secuencia binaria  $\hat{I}$  el decodificador decide por un bit 0 si  $\hat{\alpha}_j \leq 0$  y por 1 si  $\hat{\alpha}_j > 0$ .

Las señales transmitidas son generadas con la multiplicación matricial  $\Phi\mathbf{a}$  donde  $\Phi$  contiene las muestras de la base vectorial seleccionada. Para las pruebas se usaron las bases TF y LF con  $M = 4$  armónicas y  $K = 4$  polinomios. De manera similar la recepción se realiza con la multiplicación con la pseudoinversa  $\Phi^\dagger\mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{r}$  son las muestras de las señales recibidas afectadas por el canal.

## 4 Resultados

La secuencia recibida  $\hat{I}$  contiene una cantidad promedio de bits erróneos dependiente de la energía del ruido y el esquema de modulación utilizado.

La gráfica BER, en la fig. 4, muestra la razón entre el número de bits transmitidos y el número de bits erróneos como función de la relación de la energía de bit  $E_b$  y de ruido  $N_0 = 2\sigma^2$ . En ella puede ser observado que en el esquema TF se producen más errores que LF para la misma intensidad de ruido y la misma distancia interarmónica  $P = 4$  y  $P = 8$ . También, en

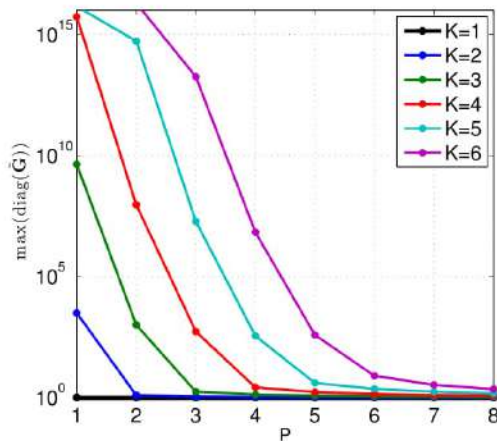


**Figura 4:** Desempeño BER y diagramas de dispersión de  $\hat{a}_{2,2}$  con varianza  $\sigma^2 = 0,1$  a) TF,  $P = 4$  y b) LF,  $P = 8$ .

ambos esquemas el incremento de la distancia interarmónica reduce la cantidad de errores.

Este comportamiento puede ser explicado de la siguiente manera. Dado que el operador pseudoinversa es lineal, el vector recibido puede ser descompuesto como  $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$  donde  $\mathbf{n}$  es la contribución del ruido. La matriz de covarianzas se relaciona con la relación la base de expansión por medio de la matriz gramiana  $\mathbf{C}_n = \sigma^2\mathbf{G}^{-1}$  [9] definida como  $\mathbf{G} = \Phi^H\Phi$  para señales discretas. En el caso ortogonal se reduce a la matriz diagonal  $\mathbf{C}_n = \sigma^2\mathbf{I}$ . Las varianzas para cada dimensión se encuentran en la diagonal de  $\mathbf{C}_n$ .

Se observa en la fig 5 que las varianzas 1) aumentan por la inclusión de polinomios  $K > 1$ , lo que era esperado pues son los polinomios lo que producen la no ortogonalidad de la base. 2) decrecen con el incremento de la distancia interarmónica  $P$ , lo que indica una ortogonalización por separación frecuencial y un acercamiento al desempeño de OFDM ortogonal. 3) Existen casos de muy alta varianza en  $P = 1$ , caracterizados por un número de condición elevado en la gramiana. Estos últimos constituyen casos de combinaciones no recomendables.



**Figura 5:** Máximo elemento de  $C_n$  con  $\sigma^2 = 1$  como función variables de diseño  $K, P$ . Base LF con  $M = 4$ .

## 5 Conclusiones

Fueron propuestos un par de esquemas de modulación no-ortogonal utilizando los modelos TF y LF y simulados mediante técnicas matriciales. Fue evaluado su desempeño en un canal AWGN y fue observado que ciertas combinaciones de parámetros de diseño producen más errores en el receptor.

Para las modulaciones no-ortogonales cuya no-ortogonalidad es producida por la selección de la base, el desempeño AWGN está directamente ligado al contenido de la inversa de la matriz gramiana. Lo que brinda un procedimiento analítico para evaluar dicho desempeño para futuros diseños no ortogonales en los modems de los sistemas de comunicaciones.

## Referencias

- [1] S. B. Weinstein, P. M. Ebert, "Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-19, no. 5, pp. 628-634, 1971
- [2] M. Vetterli, *et al.* *Foundations of Signal Processing*, 1ra ed. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 86-90, 2014.
- [3] T. Ebrahimi, *et al.*, "Video Coding Using a Pyramidal Gabor Expansion" *SPIE Visual Communications and Image Processing*, Vol. 1360, pp. 489-505, 1990.
- [4] M. J. Bastiaans "Gabor's expansions of a signal into gaussian elementary signals" *Proceedings of the IEEE*, Vol. 68, pp. 538-539, 1980.
- [5] Z. Cvetković. "OFDM with biorthogonal demultiplexing," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Digital Signal Processing, ICASSP*, Vol. 5, pp. 2517-2520, 2000.
- [6] W. Kozek, A. Molisch. "Nonorthogonal Pulshapes for Multicarrier Communications in Doubly Dispersive Channels," *IEEE J. on Selected Areas in Commun.*, Vol. 16 No. 8, pp. 1579-1589, 1998.
- [7] M. A. Platas-Graza, J. A. de la O Serna "Dynamic harmonic analysis through Taylor-Fourier Transform," *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, vol. 60, No.3, pp. 804-813, 2011.
- [8] J. G. Proakis, M. Salehi. *Digital communications*, 5ta ed. NY: McGraw-Hill Education, pp. 22, 2007.
- [9] S. M. Kay "Fundamentals of Statistical Signal Processing, Vol I: Estimation Theory", Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, pp. 85-86, 1993.

# Un sistema para la reconstrucción de superficies mediante técnicas de interpolación de datos dispersos

J. Zavaleta Sánchez,<sup>1\*</sup> P. Barrera Sánchez,<sup>1</sup> G. F. González Flores<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

\* Correo electrónico: jorge.zavaleta@ciencias.unam.mx

## Resumen

La interpolación de datos dispersos es de gran utilidad en la ciencia e ingeniería para el análisis y modelación de una gran cantidad de fenómenos físicos y experimentos que se presentan en estos campos. Por ello, se ha desarrollado un sistema que resuelve este problema eligiendo entre varias técnicas como, distancia inversa, funciones de base radial, B-spline multinivel y kriging. En este escrito se describe a grandes rasgos el sistema y se mostrará su aplicación a la generación de mallas estructuradas en 3D.

*Palabras clave:* Interpolación; datos dispersos; software; mallas estructuradas.

## 1 Introducción

En términos simples, la interpolación de datos dispersos se refiere al problema de ajustar una superficie a través de muestras de datos con distribución no uniforme o aleatoria. Este tema es de gran importancia práctica dentro de diversos campos de la ciencia e ingeniería debido a que en ellos es necesario analizar y modelar varios fenómenos físicos, experimentos, valores computacionales, entre otros, a partir de datos obtenidos en posiciones irregulares dentro de un dominio de interés. Por ejemplo, de acuerdo con Lee *et al.* [4], mediciones no uniformes de cantidades físicas de varios fenómenos son tomadas en geología, meteorología, oceanografía, ingeniería petrolera y minería; datos dispersos experimentales son producidos en química, física e ingeniería; y valores computacionales espaciados de manera no uniforme surgen en la salida de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales obtenidas mediante elemento finito. Por esta razón dichos campos requieren utilizar la interpolación

para propagar la información sobre todas las posiciones de un dominio de interés para ayudar con las tareas de análisis y modelación.

Con el objetivo de facilitar la resolución del problema de interpolación de datos dispersos en dos dimensiones se ha desarrollado el sistema UNAMSI, el cual es una herramienta computacional que utiliza algunas técnicas con diferentes enfoques, entre las que se encuentran los métodos de distancia inversa, las funciones de base radial, B-splines multinivel y en particular kriging que es probablemente el más utilizado en la práctica. Dentro del sistema se ha creado un módulo para la generación de mallas 3D a partir de la reconstrucción de superficies, ya que en numerosas aplicaciones es necesario construir una malla estructurada 3D que sea adecuada para la simulación numérica de algún fenómeno dentro de una región de interés. Una muestra de ello se encuentra en la simulación numérica del flujo de hidrocarburos dentro de un yacimiento, donde la malla 3D que nos permite modelar este fenómeno debe ser construida a partir de los



datos geológicos y petrofísicos recabados en los pozos.

Aquí se presenta el sistema de interpolación de datos dispersos y su aplicación para la generación de mallas hexaedrales estructuradas. Con este fin, se describe el problema de interpolación de datos dispersos en 2D, para después mostrar el sistema y las ideas de la construcción de la malla utilizadas en módulo de generación.

## 2 Interpolación de datos dispersos en dos dimensiones

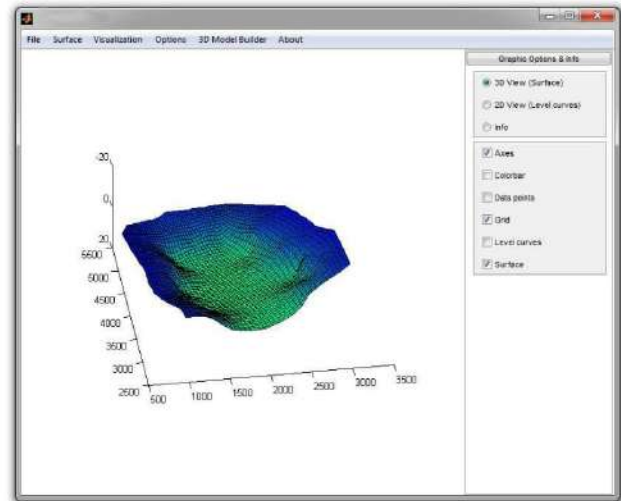
El problema de interpolación en dos dimensiones puede ser formulado como sigue: Sea  $\mathcal{P} = \{(x_i, y_i, z_i)\} \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto de puntos dispersos en el espacio, donde  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T \in \mathcal{D}$  para  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  un dominio en el plano e  $i = 1, \dots, N$ . Resolver el problema consiste en encontrar una función escalar continua bivariada  $F$ , tal que  $F(\mathbf{x}_i) = F(x_i, y_i) = z_i$ . En algunas ocasiones cuando los datos tienen errores de medición es útil considerar el problema de aproximación en lugar del problema de interpolación, es por ello que también se trata este problema. Análogamente, resolver el problema de aproximación consiste en encontrar una función escalar continua bivariada  $F$ , tal que  $F(\mathbf{x}_i) \approx z_i$ .

Existe una gran variedad de métodos para resolver este problema, aunque aquí solo se enuncian algunos de los que han sido utilizados en la práctica (Franke [3]). Todos los métodos están basados en la idea de que el valor desconocido en algún punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  debe ser muy parecido a los valores de los datos  $z_i$  en las posiciones  $\mathbf{x}_i$  que estén más cercanas a  $\mathbf{x}$ . Los métodos se pueden clasificar en dos grupos: Globales, que utilizan todos los puntos de los datos y locales, en el caso contrario. Utilizando esta clasificación los métodos utilizados en el sistema son los siguientes:

- Globales
  - Método de Shepard (distancia inversa).
  - Funciones de base radial.

- Aproximación B-spline multinivel.
  - Kriging (ordinario y universal).
- Locales
    - Método de Shepard modificado (distancia inversa).

Una exposición amplia sobre los métodos y mayores referencias sobre estos puede ser consultado en Zavaleta [6].

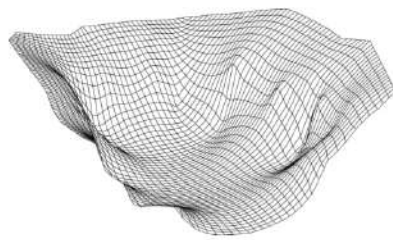


**Figura 1:** Sistema de interpolación de datos dispersos.

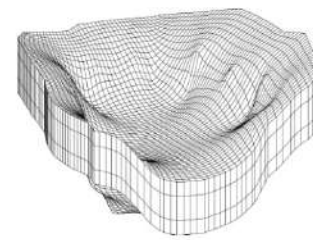
## 3 Sistema de interpolación de datos dispersos

El sistema UNAMSI para interpolación de datos dispersos (figura 1) fue desarrollado en Matlab con el objetivo de tener una herramienta que facilite la resolución de este problema en dos dimensiones. La razón de tener diferentes métodos de resolución es para que el usuario tenga la posibilidad de elegir el que mejor se adecue a sus necesidades.

Dicho sistema está pensado para trabajar con un conjunto de datos a la vez. Cuenta con herramientas para la visualización y edición de los datos, reconstrucción de la superficie mediante los distintos métodos descritos y una herramienta para el cálculo del variograma, que sirve para



(a) Superficie base



(b) Malla 3D

**Figura 2:** Proceso de la construcción de la malla 3D.

el análisis de la correlación espacial de los datos, identificación de anisotropía y principalmente para el cálculo de variogramas experimentales y ajuste de modelos admisibles de variograma necesarios para kriging.

Para utilizar los métodos de interpolación dentro del sistema solo basta con elegir el método deseado y la malla sobre la que se proyecta la superficie reconstruida. Cada método tiene sus parámetros correspondientes definidos por defecto para facilitar su uso, sin embargo, para usuarios expertos, se tiene la posibilidad de cambiar tales valores.

Las mallas usadas para la reconstrucción son mallas estructuradas en el plano. Para ello se pueden elegir mallas rectangulares euclidianas y mallas generadas por el sistema UNAMalla 4.0 (UNAMALLA GROUP [5]), un sistema para generación de mallas estructuradas sobre regiones irregulares en el plano (Barrera *et al.* [1]). Una descripción más detalla sobre el sistema puede ser encontrada en Zavaleta [6].

### 3.1. Módulo de construcción de mallas 3D

Una de las primeras aplicaciones del sistema ha sido la generación de mallas 3D. La idea de la construcción de las mallas se divide en dos pasos:

- Realizar la reconstrucción de una superficie en una región de interés mediante los métodos de interpolación de datos dispersos utilizando mallas estructuradas en dos dimensiones para generar la superficie base (véase figura 2a).

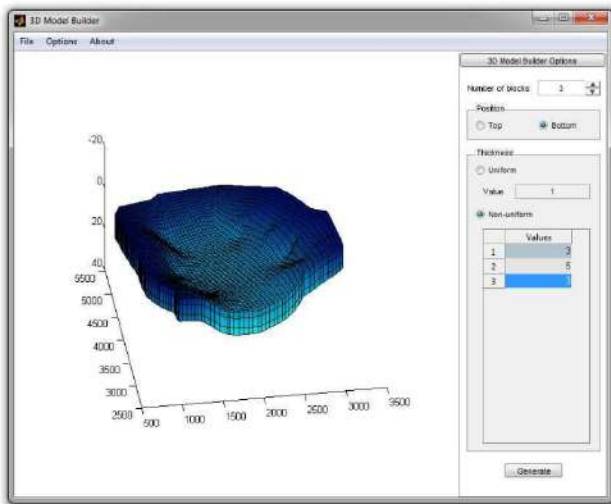
- Construir la malla 3D a partir de copias verticales de la superficie base, como se observa en la figura 2b.

El módulo, que se muestra en la figura 3, está pensado para aprovechar la estructura de las mallas utilizadas para la reconstrucción de la superficie. De este modo cuando se generan las copias verticales para construir la malla 3D es fácil extender y conservar esta propiedad de las mallas en el plano utilizadas (Barrera *et al.* [1]). La herramienta de construcción permite visualizar la superficie base y definir el número de bloques (copias) que se deseen utilizar. Para ello permite especificar el grosor de los bloques de manera uniforme o con diferentes valores para las separaciones entre capa y capa, dando flexibilidad para ciertas aplicaciones.

Con el fin de generar una malla hexaedral, se formula un problema variacional el cual puede resolverse como un problema de optimización a gran escala sin restricciones (Barrera *et al.* [2]). La malla inicial para este proceso es justamente la malla construida mediante las copias verticales; al final del mismo se obtiene una malla estructurada y hexaedral.

## 4 Conclusiones

El sistema permite la resolución del problema de interpolación mediante diferentes métodos, esto para que el usuario tenga la posibilidad de elegir el que mejor se adecue a sus necesidades. Además, proporciona herramientas visuales para el procesamiento de los datos, permite efectuar el cálculo de algunos estadísticos univaria-



**Figura 3:** Módulo de generación de mallas hexaedrales.

dos y del variograma, para el análisis de los mismos. El módulo incorporado sirve para construir de forma sencilla mallas 3D sobre algunas regiones complicadas aprovechando las cualidades de las mallas obtenidas por el sistema UNAMalla, y construir finalmente una malla hexaedral estructurada para ser usada en una gama amplia de aplicaciones.

## Referencias

- [1] Barrera P., Cortés, J.J., González G., Domínguez Mota F.J., Tinoco J.G. Smoothness and Convex Area Functionals-Revisited. *Journal on Scientific Computing, SIAM*, 32(4):1913–1928, 2010.
- [2] Barrera P., Cortés J.J., González G. Harmonic Hexahedral Structured Grid Generation. *Mathematical and Computer Modelling Journal, ELSEVIER*, 57(9–10):2289–2301, 2011.
- [3] Franke R. Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods. *Mathematics of Computations*, 33(157):181–200, 1982.
- [4] Lee S., Wolberg G., Shin S.Y. Scattered Data Interpolation with Multilevel B-

Splines. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(3):228–244, 1997.

- [5] UNAMALLA GROUP. Página web del grupo UNAMALLA. <http://www.matematicas.unam.mx/una-malla>
- [6] J. Zavaleta Sánchez. *Un sistema para la reconstrucción de superficies mediante técnicas de interpolación de datos dispersos*. UNAM, 2014.

# Próximos eventos

## 2017 **EMNO**

### **VI Encuentro Cuba- México Métodos Numéricos y Optimización**

del 13 al 17 de marzo de 2017, La Habana, Cuba



#### *Primer Anuncio*

Teniendo en cuenta el éxito de los cinco encuentros celebrados en La Habana desde el año 2012, el Comité Organizador de EMNO 2017 ha decidido extender una cordial invitación a todos los científicos interesados en colaborar con instituciones cubanas y mexicanas en las disciplinas de Análisis Numérico y Optimización, con independencia de su país de procedencia.

El Encuentro está dirigido a investigadores, profesores y estudiantes interesados en los temas más actuales de investigación en las áreas ya mencionadas.

Se realizarán dos tipos de actividades: cursos introductorios y presentación de ponencias. Se dará prioridad a las ponencias que presenten el estado del arte en algún tema de investigación de las siguientes temáticas:

- *Optimización*
- *Algebra Lineal Numérica*
- *Interpolación y Aproximación*
- *Software para Cómputo Científico*
- *Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales*

Los interesados en participar con una ponencia o impartir un curso deben elaborar un resumen de una página que contenga el nombre de los autores, instituciones, título de la ponencia o curso y palabras claves.

Las memorias del evento serán publicadas en un número especial de la Revista Ciencias Matemáticas. El Comité Científico seleccionará los trabajos a publicar entre los presentados en el evento.

#### **Fechas importantes**

- Entrega de resúmenes: hasta el 10 enero, 2017.
- Aceptación de los trabajos: 25 enero, 2017.

#### **Cuota de inscripción:**

Extranjeros: 80.00 cuc  
Cubanos: 80.00 cup

#### **Más información en el segundo anuncio**

#### **Comité Organizador**

- Pablo Barrera Sánchez, UNAM, México
- Guilmer González Flores, UNAM, México.
- Francisco Domínguez Mota, UMich, México.
- Victoria Hernández Mederos, ICIMAF, Cuba.
- Marta Lourdes Baguer, UH, Cuba.



# ¿QUIERES PUBLICAR "ARTÍCULOS", "INFORMACIÓN SOBRE EVENTOS" O "NOTICIAS" EN EL BOLETÍN?

La **Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones**, A. C. (SMCCA), convoca a toda la comunidad interesada en el área de la Computación Científica y sus Aplicaciones, a presentar noticias, información sobre eventos, artículos de divulgación e investigación de alta calidad en el área, así como reportes de trabajos de tesis de nivel licenciatura y posgrado en Matemáticas Aplicadas.

## Requisitos para las colaboraciones en el Boletín

### I.- Artículos de Divulgación e Investigación

- a) Los artículos que se envíen para ser publicados deberán ser inéditos y no haber sido ni ser sometidos simultáneamente a la consideración en otras publicaciones.
- b) Los artículos deben presentarse en el formato de la plantilla LaTeX disponible en [www.smcca.org.mx](http://www.smcca.org.mx)
- c) No deberán exceder de ocho páginas, tamaño carta incluyendo texto, tablas y gráficos.

### II.- Información sobre eventos

- a) Los eventos cuya información quiera ser publicada para promocionarlos, deberán estar relacionados con el área de las Matemáticas Aplicadas y la Computación Científica.
- b) La información debe enviarse en un archivo de imagen: PDF, JPG, PNG.
- c) La información no deberá exceder a una cuartilla.
- d) Enviar la información con al menos 6 meses de anticipación a la fecha en que se llevaría a cabo.

### III.- Noticias

- a) Las noticias a ser publicadas en el Boletín deben ser noticias relevantes de actividades de la SMCCA, Socios, Comunidad Científica interesada en las Matemáticas y Computación Aplicada
- b) La información de las noticias debe enviarse en un archivo de imagen: PDF, JPG, PNG.
- c) La información no deberá exceder a una cuartilla.

El material de colaboración: noticias, información eventos, artículos deberán ser dirigidos a la Dra. Irma Delia García Calvillo al correo electrónico de la SMCCA [smcca@smcca.org.mx](mailto:smcca@smcca.org.mx)

Todos los artículos son sometidos a evaluación por especialistas de instituciones nacionales e internacionales y su publicación estará sujeta a la disponibilidad de espacio en cada número. Las demás colaboraciones se someterán a corrección de estilo y su publicación estará sujeta a la disponibilidad de espacio en cada número. Sólo se aceptará el material enviado que satisfaga todos los requisitos aquí señalados.

El envío de cualquier colaboración al Boletín implica no sólo la aceptación de lo establecido en este documento, sino también la autorización al Comité Editorial del Boletín de la SMCCA para incluirlo en su página electrónica, reimpresiones, colecciones y en cualquier otro medio que permita lograr una mayor y mejor difusión.

# Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus

**A**consejo Directivo de la Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones 2013-2017

Dra. Rina Betzabeth Ojeda Castañeda.	Presidenta
Dr. Francisco Javier Domínguez Mota.	Vicepresidente
Dra. Irma Delia García Calvillo.	Secretaria
Dr. Justino Alávez Ramírez.	Tesorero
Dr. Pedro Flores Pérez.	Vocal
Dr. Pablo Barrera Sánchez.	Vocal
M.C. Francisco Cepeda Flores.	Secretario de Actas y Acuerdos

La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones fue fundada el 16 de Mayo de 2013, para realizar actividades de investigación científica o tecnológica inscritas en el RENIECyT (Registro Nacional de Instituciones y Empresas Científicas y Tecnológicas), prestadas únicamente a los socios y asociados. Es una Asociación sin fines de lucro. Entre sus tareas fundamentales destacan: Conjuntar acciones e intereses comunes en los investigadores, profesores y estudiantes interesados en la Computación Científica y sus Aplicaciones, con el fin de fomentar la investigación de calidad, promover la actualización y el perfeccionamiento para el desarrollo científico, tecnológico y social; promover la creación, organización, acumulación y difusión de conocimientos referidos a la Computación Científica y sus Aplicaciones; promover la formación e interacción de redes y grupos de trabajo orientados hacia el desarrollo disciplinar, interdisciplinar y temático de la investigación; fomentar el desarrollo de la investigación sobre la Computación Científica y sus Aplicaciones en la República Mexicana; contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la Computación Científica y sus Aplicaciones en la República Mexicana; promover y organizar toda clase de encuentros y eventos académicos orientados a la comunicación y discusión entre investigadores y profesores, así como también a la difusión del conocimiento hacia sectores interesados en la integración de la Computación Científica y sus Aplicaciones en los problemas de su sector.

Correo electrónico: [smcca@smcca.org.mx](mailto:smcca@smcca.org.mx)  
<http://www.smcca.org.mx>

