

ESTABILIDAD GLOBAL DE UN MODELO EPIDEMIOLÓGICO CON

MIGRACIÓN Y TRANSPORTE

Autores: Itzayana Yisely Madrigal Estrada
Dr. Gamaliel Blé González (UJAT)

UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO



1. Introducción.

Un problema básico de la epidemiología es determinar umbrales que permitan determinar las condiciones para que una enfermedad infecciosa desaparezca o se convierta en endémica. Tal es el caso del número reproductivo básico \mathfrak{R}_0 , el cual es el promedio de nuevos casos que una persona infectada puede provocar durante el periodo de contagio, por lo que $\mathfrak{R}_0 < 1$ implica la erradicación de la enfermedad. En un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales, esta condición implica la existencia de un punto de equilibrio libre de enfermedad globalmente estable. Se han propuesto modelos para describir la dinámica de la propagación de enfermedades debido a la migración de la población entre diferentes parches, Cui et al (2006) propusieron un modelo SIS que considera la posibilidad de adquirir la enfermedad durante el viaje. El siguiente modelo en particular es derivado del modelo propuesto por Cui et al en este se considera que solo los susceptibles viajan.

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2, \\ \dot{I}_1 &= \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d) I_1, \\ \dot{S}_2 &= a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1, \\ \dot{I}_2 &= \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d) I_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Dado que es un modelo epidemiológico consideramos que todos los parámetros son positivos y únicamente estamos interesados en los equilibrios positivos.

2. Estabilidad local de los puntos de equilibrio.

Los puntos de equilibrio del sistema son

$$P_1 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right), \quad P_2 = (S^*, I^*, S^*, I^*),$$

$$P_3 = (\bar{S}_1, 0, \bar{S}_2, \bar{I}_2), \quad P_4 = (\bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{S}_1, 0)$$

si $\beta > c + d$.

Donde

$$S^* = \frac{a}{b + c(\mathfrak{R}_0 - 1)}, \quad I^* = \frac{a(\mathfrak{R}_0 - 1)}{b + c(\mathfrak{R}_0 - 1)},$$

$$\bar{S}_1 = \frac{a + \alpha \bar{S}_2}{b + \alpha}, \quad \bar{S}_2 = \frac{a(b + 2\alpha)}{b(b + 2\alpha) + c(b + \alpha)(\mathfrak{R}_0 - 1)}, \quad \bar{I}_2 = (\mathfrak{R}_0 - 1)\bar{S}_2,$$

y $\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta}{c + d}$. Además, P_2, P_3 y P_4 existen si $\mathfrak{R}_0 > 1$.

PROPOSICIÓN 2.1 Si $\mathfrak{R}_0 < 1$, entonces el equilibrio libre de enfermedad P_1 es localmente asintóticamente estable. Si $\mathfrak{R}_0 > 1$ entonces P_2 es localmente asintóticamente estable y P_1, P_3 y P_4 son inestables.

Demostración.

La matriz jacobiana asociada al modelo (1) es

$$J(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -\beta A_{11} - b - \alpha & -\beta A_{12} + d & \alpha & 0 \\ \beta A_{11} & \beta A_{12} - (c + d) & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\beta A_{33} - b - \alpha & -\beta A_{34} + d \\ 0 & 0 & \beta A_{33} & \beta A_{34} - (c + d) \end{pmatrix}$$

$$\text{De donde } A_{11} = \left(\frac{I_1}{S_1 + I_1}\right)^2, \quad A_{12} = \left(\frac{S_1}{S_1 + I_1}\right)^2,$$

$$A_{33} = \left(\frac{I_2}{S_2 + I_2}\right)^2 \text{ y } A_{34} = \left(\frac{S_2}{S_2 + I_2}\right)^2.$$

Evaluando J en P_1 tenemos que

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -b - \alpha & -\beta + d & \alpha & 0 \\ 0 & \beta - (c + d) & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -b - \alpha & -\beta + d \\ 0 & 0 & 0 & \beta - (c + d) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, los valores propios de $J(P_1)$ son $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = -b - 2\alpha$, $\lambda_3 = \mathfrak{R}_0 - 1$ y $\lambda_4 = \mathfrak{R}_0 - 1$. Por lo tanto, P_1 es localmente asintóticamente estable, si $\mathfrak{R}_0 < 1$.

Si $\mathfrak{R}_0 > 1$, entonces P_1 es un punto silla y es inestable.

Para la estabilidad de P_2 se usó el criterio de Routh-Hurwitz y se concluye que P_2 es localmente asintóticamente estable. Aplicando la regla de Descartes al polinomio característico tenemos que P_3 y P_4 son inestables.

3. Simulación para $\mathfrak{R}_0 < 1$.

Dando valores a los parámetros, $\alpha = a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = 1$ y $\beta = 1$, tenemos que el sistema (1) se simplifica como

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= 1 - \frac{3}{2}S_1 + S_2 + I_1 - \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{5}{2}I_1, \\ \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - \frac{3}{2}S_2 + I_2 - \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} - \frac{5}{2}I_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Los puntos de equilibrio del sistema son $P_1 = (2, 0, 2, 0)$, $P_2 = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $P_3 = (-25, 15, -16, 0)$ y $P_4 = (-16, 0, -25, 15)$.

Los valores propios de $J(P_1)$ son $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{3}{2}$ y $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$ por lo que P_1 es estable. Las series de tiempo se pueden observar en la figura 1.

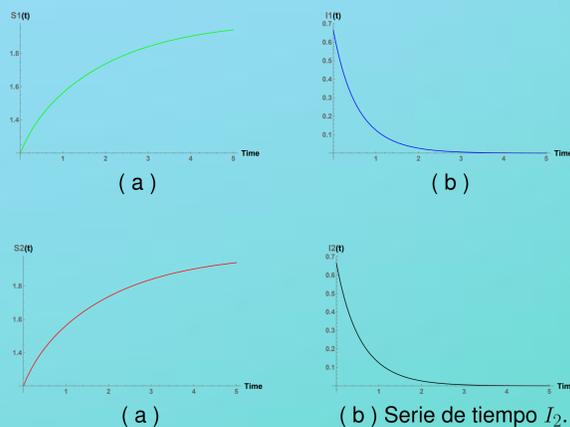


Fig. 1. Series de tiempo de las poblaciones S_1, S_2, I_1 e I_2 .

Dando valores a los parámetros, $\alpha = a = d = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{9}{4}$, y $\beta = \frac{5}{4}$, tenemos que el sistema (1) se simplifica como

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= 1 - \frac{7}{4}S_1 + S_2 + I_1 - \frac{5S_1 I_1}{4(S_1 + I_1)}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{5S_1 I_1}{4(S_1 + I_1)} - \frac{13}{4}I_1, \\ \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - \frac{7}{4}S_2 + I_2 - \frac{5S_2 I_2}{4(S_2 + I_2)}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{5S_2 I_2}{4(S_2 + I_2)} - \frac{13}{4}I_2.\end{aligned}\quad (3)$$

El único punto de equilibrio con coordenadas positivas es $P_1 = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0\right)$. Los valores propios de $J(P_1)$ son $\lambda_1 = -\frac{9}{4}$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ y $\lambda_4 = -\frac{1}{4}$ por lo que P_1 es estable. Podemos ver las series de tiempo en la figura 2.

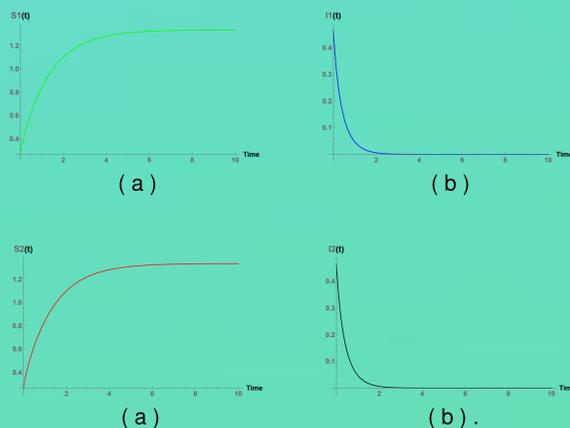


Fig. 2. Series de tiempo de las poblaciones S_1, S_2, I_1 e I_2 .

4. Simulaciones para $\mathfrak{R}_0 > 1$.

Dando valores a los parámetros, $\alpha = a = b = d = 1$, $\beta = 4$ y $c = 2$, tenemos que el sistema (1) se simplifica como

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= 1 - 2S_1 + S_2 + I_1 - \frac{4S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{4S_1 I_1}{S_1 + I_1} - 3I_1, \\ \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - 2S_2 + I_2 - \frac{4S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{4S_2 I_2}{S_2 + I_2} - 3S_2.\end{aligned}\quad (4)$$

Los puntos de equilibrio del sistema son $P_1 = (1, 0, 1, 0)$, $P_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $P_3 = \left(\frac{9}{13}, \frac{3}{13}, \frac{11}{13}, 0\right)$ y $P_4 = \left(\frac{11}{13}, 0, \frac{9}{13}, \frac{3}{13}\right)$.

Los valores propios de $J(P_1)$ son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 1$ por lo que P_1 es inestable.

Los valores propios de $J(P_2)$ son $\lambda_1 = -3.118$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm 0.5i$ y $\lambda_4 = -0.882$ como la parte real de todos los valores propios es negativa, entonces el punto de equilibrio P_2 es estable.

Los valores propios de $J(P_3)$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3.059$, $\lambda_{3,4} = -0.97 \pm 0.347i$ por lo que P_3 es inestable.

Los valores propios de $J(P_4)$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3.059$, $\lambda_{3,4} = -0.97 \pm 0.347i$, por lo que P_4 es inestable. Las series de tiempo se pueden observar en la figura 3.

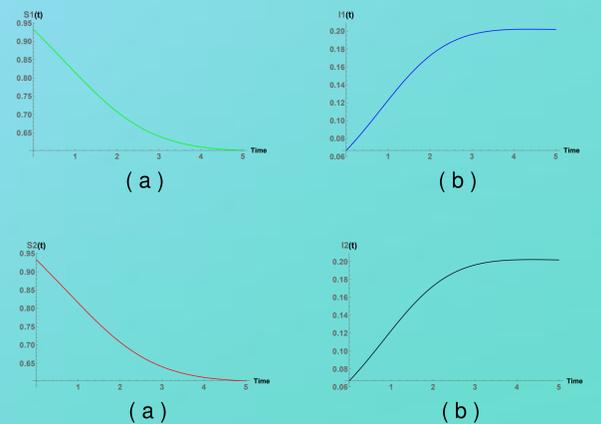


Fig. 3. Series de tiempo de las poblaciones S_1, S_2, I_1 e I_2 .

Dando valores a los parámetros, $\alpha = \beta = a = 1$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$ tenemos que el sistema (1) se simplifica como

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= 1 - \frac{9}{8}S_1 + S_2 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \frac{3}{4}I_1, \\ \dot{S}_2 &= 1 + S_1 - \frac{9}{8}S_2 + \frac{1}{2}I_2 - \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} - \frac{3}{4}I_2.\end{aligned}\quad (5)$$

Los puntos de equilibrio del sistema son $P_1 = (8, 0, 8, 0)$, $P_2 = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$, $P_3 = \left(\frac{126}{23}, \frac{136}{69}, \frac{424}{69}, 0\right)$ y $P_4 = \left(\frac{424}{69}, 0, \frac{136}{23}, \frac{136}{69}\right)$.

Los valores propios de $J(P_1)$ son $\lambda_1 = -2.12$, $\lambda_2 = 0.25$, $\lambda_3 = 0.25$ y $\lambda_4 = -0.12$ por lo que P_1 es inestable.

Los valores propios de $J(P_2)$ son $\lambda_1 = -2.18$, $\lambda_{2,3} = -0.18 \pm 0.06i$ y $\lambda_4 = -0.18$, como la parte real de todos los valores propios es negativa, entonces el punto de equilibrio P_2 es estable.

Los valores propios de $J(P_3)$ son $\lambda_1 = 0.25$, $\lambda_2 = -2.15$, $\lambda_{3,4} = -0.17 \pm 0.04i$ por lo que P_3 es inestable.

Por último, los valores propios de $J(P_4)$ son $\lambda_1 = 0.25$, $\lambda_2 = -2.15$, $\lambda_{3,4} = -0.17 \pm 0.04i$, por lo que P_4 es inestable. Las series de tiempo se pueden observar en la figura 4.

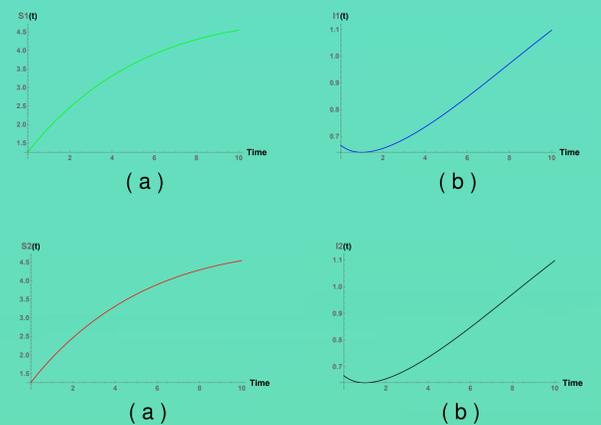


Fig. 4. Series de tiempo de las poblaciones S_1, S_2, I_1 e I_2 .

5. Conclusión.

A través de las simulaciones pudimos ejemplificar los resultados analíticos. En particular, cuando $\mathfrak{R}_0 < 1$, existe un punto de equilibrio libre de enfermedad, el cual es localmente asintóticamente estable. Mientras que si $\mathfrak{R}_0 > 1$, aparece un equilibrio endémico el cual es localmente asintóticamente estable y por lo tanto la epidemia no desaparece en ninguna de las dos regiones.

6. Referencias.

- [1] J. Cui, Y. Takeuchi y Y. Saito (2006). *Spreading disease with transport related infection*. J. Theor. Biol. **239**, 376-390.
- [2] Perko, L. (2006). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag.